

# КВАНТ<sup>+</sup> ЯНВАРЬ 2011 №1 ФЕВРАЛЬ 2011

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛЬ Российская академия наук
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР <b>В.В.Козлов</b>
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ <b>А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев, С.А.Гордюнин, Н.П.Долбиллин (заместитель главного редактора), В.Н.Дубровский, А.А.Егоров, А.В.Жуков, П.А.Кожевников, С.П.Коновалов, С.С.Кротов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов, В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев, А.И.Черноуцан (заместитель главного редактора)</b>
РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ <b>А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин, С.П.Новиков, Л.Д.Фаддеев</b>
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ 1970 ГОДА  ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР <b>И.К.Кикоин</b>
ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА <b>А.Н.Колмогоров</b>
<b>Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский, А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков, Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер</b>

- 2 Как устроена пустота? *А.Мигдал*  
7 Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике.  
*А.Райгородский*  
16 Спагетти и ... физика. *А.Варламов*

#### ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 20 Задачи М2206–М2213, Ф2213–Ф2219  
21 Решения задач М2184–М2190, Ф2196–Ф2204

#### «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 28 Задачи  
29 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
29 Физика невыеденного яйца. *В.Котов*

#### КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Космонавтика

#### ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 34 Скорость и ускорение. *Е.Соколов*  
36 Электростатика со льдом. *А.Стасенко*  
38 Оптика колбы. *В.Дроздов*

#### ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 39 Кольца Кетле. *А.Андреев, А.Панов*

#### МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 42 Минималистские задачи. *С.Беляев*

#### ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 47 Графики в текстовых задачах. *Л.Альтшулер*  
51 Равноускоренное движение по прямой. *А.Черноуцан*

#### ОЛИМПИАДЫ

- 57 XXXII Турнир городов. Задачи осеннего тура

#### ИНФОРМАЦИЯ

- 58 Малый мехмат МГУ  
  
60 Ответы, указания, решения  
Смесь (59)

#### НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье А.Мигдала*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*



АРКАДИЙ БЕНЕДИКТОВИЧ МИГДАЛ (11 марта 1911 – 9 февраля 1991) – выдающийся советский физик-теоретик, академик, один из основоположников современной теории атомного ядра, создатель большой научной школы, человек многообразных дарований.

Аркадий Бенедиктович Мигдал – АБ, как звали его друзья и ученики, – был уникальным человеком и прожил уникальную жизнь. Блестящий ученый, один из ярких представителей Школы Ландау, он и сам был великолепным Учителем, воспитавшим несколько десятков первоклассных физиков, среди которых С.Т.Беляев, А.М.Будкер, В.М.Галицкий, А.И.Ларкин и многие другие.

А.Б.Мигдал был разносторонним человеком. Снял первый советский подводный фильм и получил удостоверение инструктора подводного спорта №1. Страстно любил горы и провел много счастливых часов на ледниках Кавказа и Памира. Гонял на одном из первых мотоциклов в послевоенной Москве, бесстрашно спускался с самых крутых горок на первых примитивных горных лыжах.

На рубеже своего сорокалетия АБ занялся скульптурой. Первым произведением была маленькая деревянная статуэтка его дога. В кабинете АБ стояли выполненные им из темных древесных корней прекрасные женские торсы. Многие его друзья и ученики получили в подарок искусно сделанные им маски Пушкина и Эйнштейна. Одна из таких масок Эйнштейна украшает Институт Нильса Бора в Копенгагене, другая – Институт физических проблем им. П.Л.Капицы в Москве. А знакомым женщинам АБ дарил изящные украшения собственного изготовления – он освоил ювелирное дело на почти профессиональном уровне.

АБ был одним из любимых учеников и близким другом великого Ландау. На вопрос уже больному Ландау, кто его

самый талантливый ученик, он сказал: «Померанчук. А, еще Мигдал, но он ведь ленится...», имея в виду его многочисленные увлечения. Но минута перед началом знаменитого семинара Ландау называлась мигдальской. «В последнюю минуту всегда может прийти Мигдал», – говорил Ландау. Представьте возмущение молодых теоретиков, когда в эту самую минуту в зал вдруг вваливается усатый пожарник в каске и спецкостюме со словами: «Выметайтесь, ребята, здесь сейчас пожарники заниматься будут». Это был, конечно, Мигдал, который обожал остроумные розыгрыши. Что стоит написанное от имени Паули в адрес семинара письмо, которое обсуждалось целый час и только потом обнаружилось, что первые буквы строчек образуют слово «дурак»! А гостей, собравшихся в ресторане на Новом Арбате на празднование его 75-летия, АБ встречал в ливрее швейцара и принимал чаевые.

Последнее десятилетие своей жизни А.Б.Мигдал увлеченно работал над пропагандой и популяризацией науки. Написал книги: «Поиски истины» (1983), «Квантовая физика для больших и маленьких» (1989), стал главным редактором «Энциклопедического словаря юного физика» (1984). Опубликовал несколько блестящих статей для школьников в журнале «Квант»: «Письмо школьникам, которые хотят стать физиками» (1975), «Вычисления без вычислений» (1979, 1991), «Судьба нейтронных звезд» (1982), «Как создавалась квантовая теория» (1984), «Как устроена пустота?» (1986). Он был непримиримым врагом и разоблачителем всяческой лженауки.

Если вы захотите больше узнать об Аркадии Бенедиктовиче, прочитайте сборник «Воспоминания об академике А.Б.Мигдале» (М.: Физматлит, 2003).

# Как устроена пустота?

А.МИГДАЛ

**Р**ЕЧЬ ПОЙДЕТ О ТОМ, КАК ИЗМЕНИЛИСЬ НАШИ представления о самом распространенном во Вселенной и, быть может, самом важном объекте физических исследований – о пустоте.

Что такое пустота: абстрактное понятие, «ничто», вместилище для физических тел? Что останется, если идеальный насос удалит из замкнутого объема все частицы? Что находится в межзвездном пространстве, где почти нет вещества?

Развитие физики последних десятилетий показало, что наше физическое пространство – вакуум – не просто геометрический объект, не пространство, в котором ничего нет, а сложная система, обладающая интереснейшими свойствами, совершенно непохожими на свойства твердых сред, жидкостей или газов; его изучение касается самых глубоких понятий – таких, как причинность, связь геометрии с материей, симметрии пространства и времени, связь симметрии с законами сохранения...

## Нельзя толкнуть, не прикасаясь

Мы знаем, что тела действуют друг на друга при соприкосновении. Бросим в воду камень – от него побежит волна и всколыхнет плавающие ветки. Это и понятно – воздействие передается от точки к точке. Звук распространяется потому, что давление передается от одного объема среды к соседнему и т.д. Если накрыть звучащий электрический звонок стеклянным колпаком и откачать воздух, то видно, как молоточек по-прежнему ударяет по колокольчику, но звук исчезает – в пустом пространстве звук не распространяется. В то же время период колебаний маятника, помещенного под колпак, не изменяется при удалении воздуха (если пренебречь трением); значит, не изменяется и сила тяжести.

В отличие от сил, возникающих при распространении звука, электрические и магнитные силы, так же как и гравитация, действуют и в пустоте, в ней рас-



пространяется свет, поэтому мы видим Солнце и звезды.

Естественно предположить, что в пространстве вблизи магнита, вблизи заряженного или массивного тела состояние пустоты изменяется. Пространство, окружающее эти тела, находится в «напряженном» состоянии, которое описывается словами: « в пространстве имеется поле». Заряды создают электрическое поле, магниты – магнитное, массивное тело вызывает гравитационное поле. Электрическое поле действует на заряженное тело, магнитное – на магнит, поле силы тяжести – например, на камень, заставляя их двигаться. Изменение скорости этих тел объясняется действием поля в той области пространства, где в данный момент времени они находятся. Сила передается через пустое пространство от точки к точке с помощью полей, как через невидимую жидкость. Такой механизм передачи воздействия называется близкодействием и принят современной физикой.

Но существовало и другое представление – «дальнодействие»: влияние одного тела на другое мгновенно передается на расстояние. На основе этого взгляда Исаак Ньютон построил свою теорию тяготения. Предположение о мгновенной передаче воздействия не помешало ему найти закономерности движения небесных тел, с огромной точностью совпадающие с данными наблюдений. Сейчас мы знаем, почему: небесные тела движутся со сравнительно малыми скоростями, а гравитационное взаимодействие распространяется со скоростью света и может считаться в этом случае мгновенным.

Идею дальнодействия трудно согласовать со свойствами света: было известно, что свет распространяется с конечной скоростью и проходит все промежуточные точки на линии светового луча. Особенно хорошо это видно, когда луч света проходит в тумане – он непрерывен. Ньютон предположил, что светящееся тело испускает частицы, передающие свет, – корпускулы. Тогда конечность скорости не противоречит идее дальнодействия, но остаются без объяснения волновые свойства света, доказанные опытами по интерференции и дифракции. Корпускулярная теория Ньютона так и не смогла справиться с объяснением этих явлений.

Через двести с лишним лет после Ньютона, в 1905 году, появилась замечательная работа Альберта Эйнштейна по квантовой природе света. Эйнштейн показал, что обнаруженные экспериментально закономерности фотоэффекта (вырывание электронов из атома при облучении) можно объяснить, только предположив, что свет представляет собой набор частиц – фотонов, которые взаимодействуют с электронами, выбрасывая их из атомов. (О фотонах мы подробнее поговорим позже.) Представление о свете как о волне не могло объяснить главную особенность фотоэффекта – энергия вылетающего электрона зависит не от интенсивности света, а только от его частоты.

В некотором смысле точка зрения Эйнштейна означала возврат к ньютоновской теории корпускул. И снова встал вопрос, на который не смог ответить Ньютон: как



Аркадий Бенедиктович Мигдал

объединить оба представления – о волновой и о корпускулярной природе света? Возник важный парадокс, который был разрешен квантовой теорией, доказавшей, что свет – и волна и частица, так же как электрон – и частица и волна! Это представление получило название «квантово-волнового дуализма».

Сейчас нам известно, что в пустоте все взаимодействия – электрическое, магнитное, гравитационное, ядерное – передаются от точки к точке со скоростью, не превышающей скорость света. Если одно тело передвинуть, должна измениться сила тяготения, действующая с его стороны на другое тело. Но если это другое тело находится далеко от первого, то пройдет заметное время, прежде чем оно получит воздействие. Где же находится возмущение, когда первое тело уже переместилось, а второе еще не имеет сведений о его новом положении?.. На этот вопрос теория дальнодействия не могла ответить, и многие физики отказались от нее еще в прошлом <сегодня – позапрошлом> веке.

Для объяснения процесса передачи воздействия на расстояние была придумана специальная среда – эфир, заполняющий все пространство между частицами вещества. Воздействие передается за счет того, что вокруг заряженных или намагниченных тел эфир деформируется, и возникает сила, действующая на другое заряженное или намагниченное тело. Деформация эфира передается последовательно – от точки к точке. Свет распространяется в нем так же, как звук в среде.

Вплоть до начала XX века физики пытались строить эфир по образу и подобию известных твердых и жидких тел, а его нужно было изучать самого по себе. Это – среда особого рода. Следствием неверного пред-



ставления о природе пустоты было возникновение интереснейших парадоксов, разрешение которых приводило к созданию новых физических теорий.

### Электромагнитные свойства пустоты

Джеймс Максвелл своими удивительными уравнениями, найденными в 1865 году, объединил различные разделы физики: оптику, электричество, магнетизм.

Начало на этом пути было положено его могучим предшественником Майклом Фарадеем, открывшим в 1831 году закон электромагнитной индукции. Если изменять магнитное поле, пронизывающее проволочное кольцо, то в проводнике возникает электрический ток – заряды в нем начинают двигаться под действием образующегося в пространстве кольцевого электрического поля. Иными словами, переменное магнитное поле порождает в пустоте переменное электрическое поле.

Еще в 1820 году другой предшественник Максвелла Ханс Эрстед обнаружил, что ток, текущий по проводнику, создает вокруг себя кольцевое магнитное поле. Если периодически изменять напряженность электрического поля в проводнике, возникает переменный ток и переменное магнитное поле. Максвелл высказал гениальную догадку о том, что не только движущиеся заряды создают магнитное поле, его образует также само переменное электрическое поле.

Из этих двух замечательных свойств пустоты следовало третье, не менее важное – в пустоте распространяются электромагнитные волны. Когда вблизи антенны радиопередатчика возникает переменное электрическое поле, оно, согласно Максвеллу, образует

вокруг себя переменное магнитное поле, а магнитное – по закону Фарадея – создает уже в соседнем месте переменное электрическое... Так возмущение передается все дальше и дальше.

Из уравнений Максвелла следовало, что электромагнитные колебания должны распространяться со скоростью света. Существование электромагнитных волн было экспериментально доказано Генрихом Герцем в 1888 году. Естественно было прийти к заключению, что свет – тоже электромагнитная волна. Это предположение было проверено и подтверждено опытом.

Как абстрактно выглядели эти представления во времена Максвелла! И как быстро они стали основой почти всех благ современной цивилизации: от телефона и радио до современных средств космической связи – не перечислить всего того, что родилось из опытов в маленьких лабораториях прошлого <позапрошлого> века, из смутных догадок великих умов!

Теория Максвелла была триумфом близкодействия: все электромагнитные воздействия передаются через среду – эфир. И тут же возникли новые противоречия.

Когда в эфире движется тело, движется ли вместе с ним эфир? Эксперименты дали противоречивые результаты, некоторые опыты показали частичное или полное вовлечение эфира в движение, другие – что эфир вовсе не увлекается движущимся телом. В 1851 году французский физик Арман Физо измерил скорость света в текущей воде и показал, что эфир частично захватывается движущейся средой. Американский физик Альберт Майкельсон в 1881 году измерял скорость света вдоль и поперек направления орбитального движения Земли. Если бы эфир был неподвижен, то скорость света вдоль движения Земли складывалась бы из скорости света в эфире и скорости Земли относительно эфира. Оказалось, что скорость света одна и та же, т.е. она не зависит от скорости источника, и если свет действительно распространяется в эфире – значит, эфир полностью увлекается Землей...

Разрешить противоречия эфира предстояло теории относительности.

### Эфир умер – да здравствует эфир!

В начале XX века идея близкодействия получила дальнейшее развитие и обоснование в теории относительности и теории тяготения Эйнштейна. Оказалось, что не только электромагнитные, но и гравитационные воздействия распространяются в пустоте со скоростью света. Скорость света вошла не только в электродинамику, но и в механику, и в теорию тяготения.

Противоречие между опытом Физо и опытом Майкельсона было снято новой формулой сложения скоростей, вытекавшей из теории относительности, свойства эфира здесь роли не играли. Отпала необходимость в самом понятии эфира, его заменил вакуум – новый непротиворечивый объект. Эфир умер.

Но в науке новое, как правило, не отменяет старого, старые и новые идеи переплетаются и проникают друг в друга. Даже коренная научная революция не отменяет, а только пересматривает, переосмысливает, устанавливает границы применимости найденных

ранее соотношений. Судьба эфира – убедительное подтверждение этому.

В начале XX века казалось, что все свойства пустоты объясняются гравитационными и электромагнитными взаимодействиями. Но изучение атомных ядер показало, что существуют силы, удерживающие нейтроны и протоны в ядре, – ядерные силы. И с точки зрения близкодействия их тоже нужно рассматривать как особое, напряженное состояние вакуума. Вакуум обогатился еще одним свойством.

Когда к электромагнитному полю и к полям, описываемым, например, парой частиц электрон – позитрон или протон – антипротон и так далее, применили квантовую механику, оказалось, что в пустоте происходят непрерывные колебания этих полей, рождаются и исчезают элементарные частицы... При столкновениях нуклонов (нейтронов и протонов) из пустоты возникает целый сноп различных частиц. Вакуум полон частицами!

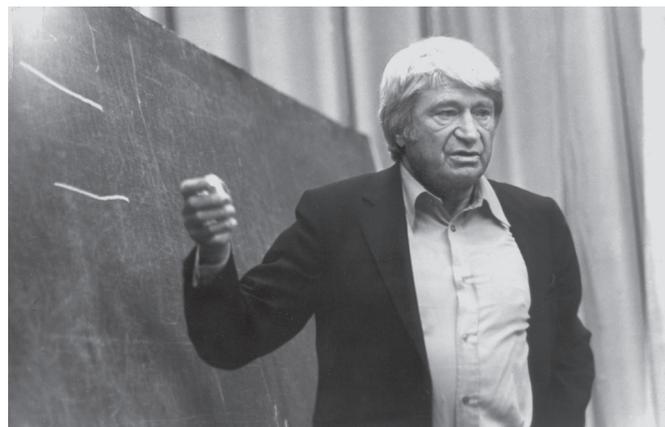
Удивительно сложную и интересную среду – вакуум – можно было бы снова назвать эфиром, если бы не боязнь путаницы с наивным понятием XIX века.

### Квантовая механика вакуумных полей

Без некоторых минимальных сведений о квантовой механике нельзя составить даже грубую физическую картину явлений, происходящих в вакууме. Поэтому, прежде чем говорить об удивительных свойствах вакуумных полей, нам придется немного отвлечься и поговорить о том, к каким результатам приводит применение квантовой механики к системам, колеблющимся около положения равновесия. Такие системы часто встречаются в физике и называются осцилляторами. Как бы ни был конкретно устроен осциллятор – будь то математический маятник, грузик на пружинке, колебательный контур, – его энергия состоит из двух слагаемых: потенциальной энергии, пропорциональной квадрату некоторой величины, которую можно назвать «обобщенной координатой», и кинетической энергии, пропорциональной квадрату скорости изменения этой «координаты». Для грузика на пружинке «обобщенная координата» – смещение грузика от положения равновесия, для колебательного контура – заряд на обкладках конденсатора. Коэффициент пропорциональности в кинетической энергии определяет «обобщенную массу». Мы называем эти величины обобщенными потому, что они не зависят от реализации осциллятора – «координате», как вы видите, совсем не обязательно иметь размерность длины.

Остановим маятник – в положении равновесия его энергия минимальна: и кинетическая, и потенциальная энергии равны нулю. Так ведет себя классический осциллятор. Но вот что получилось, когда к осцилляторам применили квантовую механику.

Один из важнейших принципов квантовой механики – принцип неопределенности, сформулированный Вернером Гейзенбергом в 1927 году, – гласит: некоторые физические величины не могут одновременно принимать определенные значения. Именно такими величинами являются «обобщенная координата» и «обобщен-



ный импульс» – произведение «обобщенной массы» на «обобщенную скорость». Прodelывая мысленные эксперименты, Гейзенберг пришел к заключению, что чем точнее измерять координату электрона, тем менее определенным становится его импульс, и наоборот. Это – принципиальное ограничение, которое природа накладывает на понятия координаты и импульса.

Когда квантовая механика была применена к осцилляторам, сразу стало ясно, что кинетическая и потенциальная энергии квантового осциллятора не могут одновременно равняться нулю: если бы это было так, то должны были бы одновременно быть определены и равны нулю и координата, и импульс осциллятора, а это противоречит принципу неопределенности. Квантовый осциллятор, в отличие от классического, даже в состоянии с наименьшей энергией не покоится. Он совершает «нулевые колебания» около положения равновесия. Это замечательное свойство квантовых осцилляторов хорошо проверено на опыте и чрезвычайно важно для современной физики.

Упругие колебания твердого тела, так же как и колебания струны, описываются набором осцилляторов различных частот. Если учесть, что осцилляторы должны подчиняться квантовой механике, то получится, что при абсолютном нуле температуры происходят нулевые упругие колебания – атомы твердого тела не неподвижны, а участвуют в «нулевых колебаниях». Это подтвердили опыты по рассеянию света в твердых телах при низких температурах.

Электромагнитные волны в пустоте тоже можно рассматривать как результат колебаний набора осцилляторов. Представим себе, что между параллельными металлическими экранами, перпендикулярно им, образовалась стоячая электромагнитная волна – она получится, если между экранами укладывается целое число полуволн. Стоячая волна возникает в результате сложения бегущих волн, отражающихся от левого и правого экранов. Похожая волна возникнет в обычной струне – дернешь струну, по ней побегут волны, отразятся от мест закрепления, и установится стоячая волна. Подобное же происходит и в органной трубе.

Напряженность электрического поля в стоячей электромагнитной волне будет периодически колебаться – перед нами снова осциллятор. В качестве «обобщенной координаты» такого осциллятора можно взять напря-



женность электрического поля в какой-либо точке (например, в точке, где амплитуда колебаний напряженности максимальна). «Импульсом» должна быть величина, пропорциональная скорости изменения «координаты», именно такая величина – напряженность<sup>1</sup> магнитного поля. Но раз «координата» и «импульс» квантового осциллятора не имеют одновременно определенных значений, значит, энергии электрического («потенциальная» энергия) и магнитного («кинетическая» энергия) полей не могут одновременно равняться нулю.

Даже если в пространстве нет ни одной частицы, ни одного кванта, электрические и магнитные поля совершают нулевые колебания. Последовательное применение квантовой механики к электромагнитному полю, взаимодействующему с электронами, было начато в конце 20-х годов <прошлого века> в работах Поля Дирака и завершено через 20 лет физиками-теоретиками Р.Фейнманом, Ю.Швингером, С.Томоногой, Ф.Дайсоном. Возник новый раздел теоретической физики – квантовая электродинамика, которая позволила с большой точностью описывать все процессы взаимодействия электронов между собой и с электромагнитным полем.

Нулевые колебания электромагнитного поля заставляют дрожать электрон, движущийся в атоме, – он как бы превращается в шарик с радиусом, равным амплитуде дрожания. Но шарик слабее взаимодействует с ядром, чем точечный электрон. В результате энергетические уровни атома слегка сдвигаются по сравнению со значениями, вычисленными без учета дрожания. Это явление называется «лэмбовским сдвигом» – по имени впервые экспериментально наблюдавшего его У.Лэмба. Квантовая электродинамика позволяет рас-

<sup>1</sup> Школьники знакомы с другой силовой характеристикой магнитного поля – магнитной индукцией. (Прим. ред.)

считать лэмбовский сдвиг с огромной точностью. Получается удивительнейшее совпадение с данными, найденными на опыте.

Еще одно свойство квантового осциллятора – его энергия изменяется порциями величиной  $h\nu$ , где  $h$  – постоянная Планка, а  $\nu$  – частота колебаний соответствующего классического осциллятора. В применении к электромагнитному полю это означает, что энергия электромагнитного осциллятора с определенной длиной волны  $\lambda$  и частотой  $\nu = c/\lambda$  тоже изменяется порциями  $h\nu$ . Когда энергия волны изменяется на одну порцию, говорят, что «появился квант электромагнитного поля». В бегущей электромагнитной волне одновременно с увеличением энергии на величину  $h\nu$  увеличивается и импульс на величину  $h\nu/c$ . Таким образом, в бегущей волне каждый квант имеет энергию  $h\nu$  и импульс  $p = h\nu/c$ . Можно сказать, что квантовое поле описывает набор частиц – фотонов (так называются кванты бегущей электромагнитной волны) – с разными энергиями и импульсами. В этом и состояла гипотеза световых квантов, развитая Эйнштейном за 20 лет до того, как она была доказана квантовой электродинамикой.

В результате квантования поля само собой возникло понятие частицы как характеристики возбуждения электромагнитной волны с определенной длиной. Так была решена проблема «дуализма волн-частиц». Удивительная идея – воспринимать частицы как квантовые состояния осцилляторов некоего поля – оказалась на редкость плодотворной. Она пронизывает всю современную теоретическую физику. Поле оказалось первичным понятием. Элементарные частицы возникают в результате его квантования.

Применение квантовой механики к полям, описывающим не фотоны, а другие частицы, например электроны и позитроны или пи-мезоны, приводит к очень похожему результату. В пустоте существуют нулевые колебания электрон-позитронного или пионного поля и вообще полей всех возможных частиц. Эти нулевые колебания проявляются в том, что в вакууме возникают и исчезают пары «частица – античастица»: электрон – позитрон, нуклон – антинуклон... Вакуум наполнен такими не вполне родившимися, образующимися и исчезающими частицами – они называются виртуальными (возможными). Но стоит в вакууме столкнуться двум нуклонам или электрону с позитроном, как виртуальные частицы могут превратиться в реальные – при столкновениях рождаются новые частицы.

\* \* \*

Мы рассказали лишь о малой части удивительных свойств пустоты. В последние годы стало известно, что в пустоте под влиянием внешних полей или высокой температуры могут происходить переходы в другие состояния, подобно плавлению твердых тел. Но самое замечательное – это «нулевые колебания» геометрических свойств пространства, которые, возможно, дадут ключ к пониманию связи сил тяготения с другими силами природы.



# Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике

А.РАЙГОРОДСКИЙ

## 1. Введение

Комбинаторика – это один из самых увлекательных разделов современной математики. И один из самых бурно развивающихся. Если еще каких-то 100 лет назад можно было сказать, что комбинаторика – это набор красивых, но разрозненных утверждений о перечислении объектов того или иного вида, то сейчас комбинаторика – это полноценная дисциплина, которая постепенно вырабатывает свой собственный язык и систему методов, позволяющих собирать воедино все то многообразие задач, которые совсем недавно казались никак не связанными между собой.

Когда говорят о комбинаторных методах, обычно вспоминают только метод производящих функций, который действительно играет огромную роль при решении *перечислительных* задач. Однако не менее значимы в комбинаторике и задачи *экстремальные*, т.е. задачи отыскания наибольших (наименьших) в том или ином смысле систем объектов. И здесь, конечно, производящие функции ни к чему. Их заменяют инструменты, которые появились буквально в последние десятилетия. Среди них *вероятностный метод* (см. [1], [2]), активно разрабатываемый с середины XX века (во многом благодаря классика венгерской и мировой комбинаторики Полу Эрдешу), *линейно-алгебраический метод* (см. [3]), возникший и вовсе около тридцати лет назад, и *топологический метод* – метод столь же молодой и в то же время столь же перспективный.

В этой статье мы хотим рассказать об исторически первой задаче, которая была решена с помощью топологической технологии. Это так называемая *гипотеза Кнезера*, сформулированная Мартином Кнезером в 1955 году и доказанная Ласло Ловасом в 1977 году. Пафос в том, что постановка задачи исключительно проста и доступна школьнику, а решение ее выходит далеко за рамки школьной программы. Тем не менее, мы построим статью так, что практически все в ней при желании сможет понять заинтересованный старшеклассник. Наша цель – на примере одной конкретной задачи продемонстрировать силу и красоту топологического метода: рассуждение, которое мы в конечном счете проведем, это поистине жемчужина (ср. [4]) комбинаторики, одно из самых элегантных

рассуждений в математике, которые известны автору. И значимость его не только в исключительном изяществе, но и в том, что оно как нельзя лучше свидетельствует о единстве математики: зачастую глубокое знание одного предмета позволяет достичь неожиданно ярких результатов в совершенно иной области; именно так возникают методы.

Отметим, что имеется прекрасная книга [5], в которой дается обзор некоторых наиболее употребительных топологических методов в комбинаторике. Правда, эта книга довольно сложна для первого чтения. Поэтому весьма полезными будут также книги [6] и [7], по которым можно получить наглядное представление о самой топологии.

## 2. Парно пересекающиеся множества и возникновение гипотезы

Рассмотрим произвольное натуральное число  $n$  и множество  $\mathcal{R}_n = \{1, \dots, n\}$ . Пусть  $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_{C_n^k}\}$  – совокупность всех  $k$ -элементных подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$ . Иными словами, каждое  $K_i$  – это подмножество множества  $\mathcal{R}_n$ , имеющее мощность  $k$ . Подчеркнем, что каждое подмножество обозначено у нас обычной заглавной буквой  $K$ , а совокупность подмножеств обозначена «красивой» заглавной буквой  $\mathcal{K}$ .

В 1955 году Кнезер установил следующий очень простой факт.

**Теорема 1.** Пусть  $k \leq \frac{n}{2}$ . Тогда совокупность  $\mathcal{K}$  можно представить в виде объединения  $n - 2k + 2$  совокупностей, элементы каждой из которых парно пересекаются. Иначе говоря,

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \dots \cup \mathcal{K}_{n-2k+2}, \quad (1)$$

причем для любого  $i \in \{1, \dots, n - 2k + 2\}$  и любых двух множеств  $K_a, K_b \in \mathcal{K}_i$  выполнено  $K_a \cap K_b \neq \emptyset$ .

Понятно, откуда взялось условие  $k \leq \frac{n}{2}$ . Во-первых, при  $k > \frac{n}{2}$  величина  $n - 2k + 2$  становится не больше единицы, что в контексте соотношения (1) нелепо. Во-вторых, при таком  $k$  любые два множества из самой совокупности  $\mathcal{K}$  имеют непустое пересечение, так что



и впрямь говорить о каком-либо объединении вида (1) смысла нет.

Совокупности, подобные  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{n-2k+2}$ , т.е. состоящие из попарно пересекающихся множеств, играют огромную роль в самых разных областях комбинаторной математики и ее приложений. Например, их можно интерпретировать как *коды* со сравнительно небольшим *расстоянием Хэмминга* между любыми двумя *кодowymi словами*. В теории кодирования они широко распространены.

Доказательство теоремы 1 исключительно легкое, но мы приведем его во всех подробностях.

**Доказательство теоремы 1.** В качестве совокупности  $\mathcal{K}_1$  возьмем совокупность, состоящую из всех  $K_a \in \mathcal{K}$ , которые содержат элемент 1 множества  $\mathcal{R}_n$ :

$$\mathcal{K}_1 = \{K_a \in \mathcal{K} : 1 \in K_a\}.$$

Очевидно, множества, принадлежащие совокупности  $\mathcal{K}_1$ , попарно пересекаются – как минимум, по элементу 1. Аналогично, положим

$$\mathcal{K}_2 = \{K_a \in \mathcal{K} : 2 \in K_a\}, \dots$$

$$\dots, \mathcal{K}_{n-2k+1} = \{K_a \in \mathcal{K} : n-2k+1 \in K_a\}.$$

Какие множества из совокупности  $\mathcal{K}$  еще не задействованы? Разумеется, те, которые целиком содержатся в множестве  $\{n-2k+2, \dots, n\}$ . Это множество имеет мощность  $2k-1$ , и, стало быть, любые два его  $k$ -элементных подмножества пересекаются. В итоге мы вольны положить

$$\mathcal{K}_{n-2k+2} = \{K_a \in \mathcal{K} : K_a \subset \{n-2k+2, \dots, n\}\},$$

и теорема 1 доказана.

Отметим, что суть доказательства теоремы не изменится, даже если мы потребуем, чтобы для любых  $i, j \in \{1, \dots, n-2k+2\}$ ,  $i \neq j$ , было выполнено  $\mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_j = \emptyset$ . Просто тогда надо брать

$$\mathcal{K}_2 = \{K_a \in \mathcal{K} : 2 \in K_a\} \setminus \mathcal{K}_1,$$

$$\mathcal{K}_3 = \{K_a \in \mathcal{K} : 3 \in K_a\} \setminus \mathcal{K}_1 \setminus \mathcal{K}_2, \dots$$

В этом случае напомним

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{K}_{n-2k+2}, \quad (1')$$

подчеркивая с помощью значка « $\sqcup$ », что объединение (1') теперь *дизъюнктное*, т.е. его элементы попарно не пересекаются.

При всей простоте доказательства теоремы 1 любые попытки уточнить его, т.е. заменить величину  $n-2k+2$  на что-либо меньшее, не приводят к успеху, и читатель может сам, вслед за Кнезером, убедиться в этом. Возникает любопытная гипотеза.

**Гипотеза.** Совокупность  $\mathcal{K}$  нельзя представить в виде объединения  $n-2k+1$  совокупностей, элементы каждой из которых попарно пересекаются.

Это и есть гипотеза Кнезера. Теперь нам предстоит понять, как она связана с теорией графов, почему обычные комбинаторные средства не помогают ее доказать и какую роль в ее доказательстве играет топология.

### 3. Небольшой экскурс в теорию графов и переформулировка гипотезы

Мы предполагаем знакомство читателя с простейшими понятиями теории графов, которые легко найти, например, в книге [8]. Тем не менее, давайте аккуратно договоримся о том, что такое *граф*. В этой статье мы будем считать, что у графа не может быть ни петель, ни кратных ребер, ни ориентации. Иными словами, граф – это пара  $G = (V, E)$ , в которой  $V$  – это конечное множество *вершин*, а  $E$  – это любой набор *ребер*  $\{x, y\}$ ,  $x, y \in V$ , с условиями: (i)  $\{x, x\} \notin E$  (нет петель); (ii) каждая пара  $\{x, y\}$  входит в  $E$  не более одного раза (нет кратных ребер); (iii)  $\{x, y\} = \{y, x\}$  (нет ориентации).

Изображать графы мы будем совершенно стандартно – точками и соединяющими их отрезками (или дугами).

Скажем, на рисунке 1 приведены примеры некоторых возможных изображений полного графа  $K_4$ , т.е.

графа, у которого на четырех вершинах присутствуют («проведены») все возможные шесть ребер. На рисунке 2 указан объект, который мы в дальнейшем графом считать не будем.

Нам понадобятся три тесно связанные между собой «экстремальные» характеристики графа.

Назовем *числом независимости* графа  $G = (V, E)$  величину  $\alpha(G)$ , равную размеру самого большого множества вершин графа, внутри которого отсутствуют ребра. Любое такое множество называется *независимым*, и именно отсюда идет название величины  $\alpha(G)$ . На рисунке 3 приведены примеры графов с числами независимости 2 и 3 соответственно. В первом

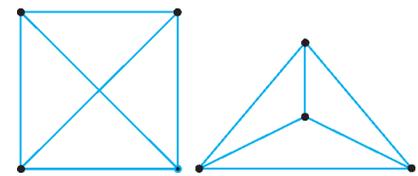


Рис. 1

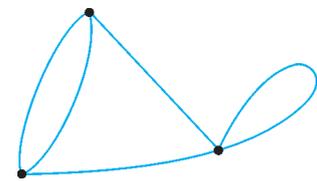


Рис. 2

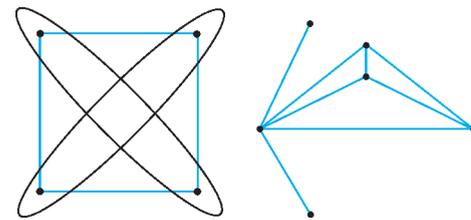


Рис. 3

случае независимых множеств максимальной мощности 2, во втором – 3.

Назовем *кликковым* числом графа  $G = (V, E)$  величину  $\omega(G)$ , равную размеру самого большого множества вершин графа, внутри которого проведены все ребра. Это величина, в некотором смысле противоположная числу независимости. Действительно, если в графе  $G$  удалить все ребра и провести вместо них все те ребра, которых в  $G$  не было, то получится граф  $\bar{G}$ , у которого  $\omega(\bar{G}) = \alpha(G)$  и  $\alpha(\bar{G}) = \omega(G)$ . Фактически,  $\omega(G) -$

это количество вершин в любом максимальном (по числу вершин) полном подграфе графа  $G$ . Именно такой полный подграф и называется *кликой* в графе.

Назовем *хроматическим числом* графа  $G = (V, E)$  величину  $\chi(G)$ , равную минимальному количеству цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы концы любого ребра имели разные цвета. Из определения видно, что каждый цвет – это независимое множество. Таким образом, хроматическое число – это еще и наименьшее количество независимых множеств, на которые можно разбить множество вершин графа.

Из последнего рассуждения ясно, что имеет место неравенство  $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$ . Действительно, даже если сделать каждый цвет максимальным по мощности, то эта мощность будет равна  $\alpha(G)$ , и, стало быть, даже в таком случае потребуется  $\frac{|V|}{\alpha(G)}$  цветов. Еще проще неравенство  $\chi(G) \geq \omega(G)$ , ведь на покраску всего графа уйдет никак не меньше цветов, чем на покраску любой клики в нем. А на клику нужно столько цветов, сколько в ней вершин.

Какое же все это имеет отношение к гипотезе Кнезера? Сейчас мы введем в рассмотрение *кнезеровский граф*, и все окончательно прояснится.

Итак, пусть по-прежнему  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq \frac{n}{2}$ . Назовем кнезеровским граф  $KG_{n,k} = (V, E)$ , у которого

$$V = \mathcal{K}, \quad E = \{\{K_a, K_b\} : K_a, K_b \in \mathcal{K}, K_a \cap K_b = \emptyset\}.$$

Иными словами, вершинами кнезеровского графа служат  $k$ -элементные подмножества множества  $\mathcal{R}_n$ , а ребра кнезеровского графа образованы парами непересекающихся  $k$ -элементных подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$ .

Независимые множества в таком графе – это, конечно же, совокупности, состоящие из попарно *пересекающихся* множеств  $K_a \in \mathcal{K}$ , т.е. в аккурат совокупности типа  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_{n-2k+2}$ . А значит, гипотеза в новых терминах звучит так: *хроматическое число кнезеровского графа равно  $n - 2k + 2$ :  $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$* . При этом неравенство  $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 2$  есть тривиальное следствие соотношения (1'), и лишь оценка  $\chi(KG_{n,k}) \geq n - 2k + 2$  является предположительной. В ней вся загвоздка.

В последующих разделах мы попробуем установить искомое неравенство с помощью стандартных оценок  $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$  и  $\chi(G) \geq \omega(G)$ . Но прежде обсудим простейшие примеры кнезеровских графов (с конкретными  $n$  и  $k$ ).

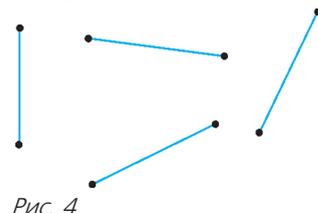
#### 4. Несколько простых примеров

Есть два простейших частных случая, которые в некотором смысле противоположны друг другу. В первом из них  $k = 1$ . Тогда вершины кнезеровского графа (т.е. графа  $KG_{n,1}$ ) суть одноэлементные множе-

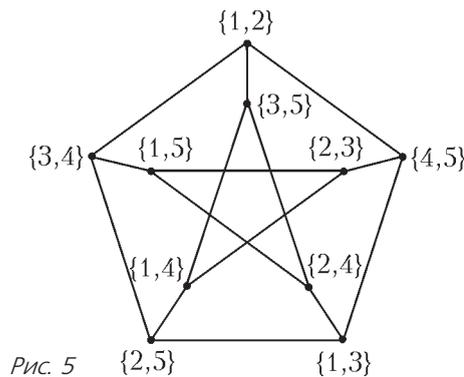
ства  $\{1\}, \{2\}, \dots \in \mathcal{R}_n$ . Разумеется, эти множества попарно не пересекаются, так что ребра в графе  $KG_{n,1}$  соединяют каждые две вершины. Иначе говоря, граф  $KG_{n,1}$  – это полный граф  $K_n$  на  $n$  вершинах. Его хроматическое число равно  $n$ , и это прекрасно согласуется с гипотезой:

$$\chi(KG_{n,1}) = \chi(K_n) = n = n - 2 \cdot 1 + 2.$$

Во втором случае  $k = \frac{n}{2}$  (здесь мы считаем, что число  $n$  четно). Тогда кнезеровский граф  $KG_{n,n/2}$  представляет собой *паросочетание*, т.е. имеет вид графа, изображенного на рисунке 4 (паросочетанием называется набор ребер, никакие два из которых не имеют общих вершин; это своего рода независимое множество ребер). Очевидно теперь, что  $\chi(KG_{n,n/2}) = 2 = n - 2 \cdot \frac{n}{2} + 2$ , и это снова подтверждает гипотезу.



Есть еще один симпатичный пример – совсем частный, но любопытный. Это граф  $KG_{5,2}$ . У него  $10 = C_5^2$  вершин, являющихся парами элементов из  $1, \dots, 5$ . Если «правильно» изобразить этот граф, то получится картинка, изображенная на рисунке 5. В теории



графов эта картинка хорошо известна. Она называется *графом Петерсена*. Ясно, конечно, что хроматическое число такого графа равно трем. Верхнюю оценку мы давно знаем:  $\chi(KG_{5,2}) \leq 5 - 2 \cdot 2 + 2 = 3$ . Нижняя же следует хотя бы из наличия нечетного цикла в нашем графе.

О графе Петерсена можно почитать в замечательной книге [8].

#### 5. Применим оценку $\chi(G) \geq \omega(G)$

Ну, это совсем легко. Действительно, что такое клика в графе  $KG_{n,k}$ ? Это, по сути, любой набор попарно непересекающихся  $k$ -элементных подмножеств множества  $\mathcal{R}_n$ . Естественно,



типичная клика выглядит так, как показано на рисунке 6. И размер ее заведомо не превышает  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ ,

где через  $[x]$  мы обозначаем максимальное целое число, не превосходящее  $x$ . В итоге имеем неравенство

$$\chi(KG_{n,k}) \geq \omega(KG_{n,k}) = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil.$$

Абсолютно ничего хорошего. Вместо желаемой оценки вида  $n - 2k + 2$  имеем примерно в  $k$  раз худший результат.

Стоит отметить еще одно любопытное обстоятельство. Допустим,  $k = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1$ . Тогда

$$\omega(KG_{n,k}) = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil < 3,$$

т.е. в кнезеровском графе нет даже треугольников. Тем не менее, мы верим, что хроматическое число такого графа равно

$$n - 2 \cdot \left( \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 1 \right) + 2 \geq n - 2 \cdot \left( \frac{n}{3} + 1 \right) + 2 = \frac{n}{3}.$$

Это, на первый взгляд, довольно удивительно: граф без треугольников и со сколь угодно большим хроматическим числом. Что ж, тем интереснее.

## 6. Применим оценку $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$

Здесь тоже все легко. Мы ведь отлично знаем, что  $\alpha(KG_{n,k}) \geq C_{n-1}^{k-1} = |\mathcal{K}_1|$  (см. доказательство теоремы 1). А стало быть, самое лучшее, на что мы можем теперь рассчитывать, это оценка

$$\chi(KG_{n,k}) \geq \frac{C_n^k}{C_{n-1}^{k-1}} = \frac{n}{k}.$$

Даже если бы мы доказали, что  $\alpha(KG_{n,k}) = C_{n-1}^{k-1}$ , это нам не помогло бы.<sup>1</sup>

Получается весьма забавная ситуация. Обе известные нам комбинаторные оценки хроматического числа приводят к практически одному и тому же результату.

В первом случае мы имели неравенство  $\chi(KG_{n,k}) \geq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ .

Во втором случае мы получили неравенство  $\chi(KG_{n,k}) \geq \frac{n}{k}$ . С учетом того, что хроматическое число

всегда целое, можно написать  $\chi(KG_{n,k}) \geq \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ , где  $\lceil x \rceil$  — это минимальное целое число, не меньшее  $x$ . Таким образом, вторая оценка только на единицу больше первой, да и то лишь при тех  $k$ , которые не делят  $n$ . Мало мы приблизились к заветной цели, пора переходить к топологии.

## 7. Теоремы Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана

Мы предполагаем знакомство читателя с самыми азами математического анализа. По существу, нам

<sup>1</sup> Этот факт верен. Он называется теоремой Эрдеша–Коррадо. Доказательство этой теоремы (не вполне тривиальное) можно найти в книге [2].

нужны лишь следующие совсем базовые объекты и понятия. Во-первых, нам потребуется пространство  $\mathbb{R}^d$ . Во-вторых, в этом пространстве мы рассмотрим сферу. Сфера — это, разумеется, поверхность шара. Если размерность шара естественно считать равной размерности всего пространства, то размерность сферы полагают на единицу меньшей. Скажем, круг на плоскости (в пространстве  $\mathbb{R}^2$ ) — это двумерное множество, а его граница — окружность — одномерна: это попросту отрезок со склеенными концами. Посему обозначим шар единичного радиуса в  $\mathbb{R}^d$  через  $B^d$ , а его сферу — через  $S^{d-1}$ :

$$B^d = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) : x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq 1 \},$$

$$S^{d-1} = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) : x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1 \}.$$

В-третьих, назовем  $A \subset S^{d-1}$  *открытым множеством*, если для любого  $\mathbf{x} \in A$  найдется достаточно маленький шарик  $B$  с центром в  $\mathbf{x}$ , у которого все точки, лежащие на сфере, содержатся и в  $A$ :  $(B \cap S^{d-1}) \subset A$ . Назовем  $A \subset S^{d-1}$  *замкнутым*, если его дополнение до всей сферы открыто.

Еще следует иметь представление о плоскостях в многомерных пространствах. Под (*гипер*)плоскостью мы будем понимать аналог обычной плоскости в  $\mathbb{R}^3$ . Если в  $\mathbb{R}^3$  любая плоскость задается уравнением  $ax + by + cz = m$ , то в общем случае плоскость — это множество

$$P = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) : a_1 x_1 + \dots + a_d x_d = m \}.$$

В этом смысле прямая на обычной плоскости  $\mathbb{R}^2$  — это тоже своего рода гиперплоскость в двумерном пространстве. Размерность гиперплоскости равна  $d - 1$ .

В 1930 году Л.А.Люстерник и Л.Г.Шнирельман доказали следующую замечательную теорему.

**Теорема 2.** Пусть  $A_1, \dots, A_d$  — замкнутые множества на сфере  $S^{d-1}$ , причем  $S^{d-1} = A_1 \cup \dots \cup A_d$ . Тогда одно из множеств обязательно содержит пару противоположных точек сферы, т.е. существует  $A_i$  и такая точка  $\mathbf{x} \in A_i$ , что  $-\mathbf{x} \in A_i$ .

Теорема 2 в случае плоскости ( $d = 2$ ) очень проста, но мы докажем ее в первом параграфе последнего раздела (см. также популярную статью [9]). Уже случай обычного пространства ( $d = 3$ ) совсем не тривиален. В прекрасной книге [10] содержится элементарное рассуждение, которое доказывает утверждение теоремы 2 при  $d = 3$ . Для полноты картины и большей замкнутости изложения мы приведем подобное рассуждение во втором параграфе последнего раздела. Общий случай элементарному изложению не поддается, и мы лишь можем отослать заинтересованного читателя к книге [5].

Теорема 2 в некотором смысле не может быть улучшена. А именно, в ней нельзя заменить  $d$  на  $d + 1$ . Иными словами, сферу  $S^{d-1}$  можно покрыть  $d + 1$  замкнутым множеством, ни одно из которых не содержит противоположных точек. В третьем параграфе последнего раздела мы расскажем, почему это так при  $d = 3$ .

Стоит отметить, что из последнего обстоятельства (возможности покрыть сферу  $d + 1$  множеством) возникла знаменитая гипотеза Борсука, о которой есть масса литературы, в том числе популярной: см. [10], [11].

В 1932 году К. Борсук, не зная о работе Люстерника и Шнирельмана, доказал ряд утверждений, равносильных теореме 2. Он исходил из соображений, высказанных незадолго до того С. Уламом. Именно поэтому все вариации на тему теоремы 2 принято сейчас называть теоремами Борсука–Улама (в западной традиции) и теоремами Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана (в российской традиции).

Для доказательства гипотезы Кнезера нам потребуются следующий вариант теоремы 2.

**Теорема 3.** Пусть  $A_1, \dots, A_d$  – множества на сфере  $S^{d-1}$ , причем часть из них замкнута, часть открыта и  $S^{d-1} = A_1 \cup \dots \cup A_d$ . Тогда одно из множеств обязательно содержит пару противоположных точек сферы, т.е. существует  $A_i$  и такая точка  $\mathbf{x} \in A_i$ , что  $-\mathbf{x} \in A_i$ .

Теорема 3 сильнее теоремы 2. В ней мы не предполагаем, что все множества, покрывающие сферу, замкнуты; мы разрешаем им также быть открытыми. Отметим, что случай, когда все множества открыты, равносильен случаю, когда все множества замкнуты. Это не очевидно, и доказательство этого можно найти в книге [5].

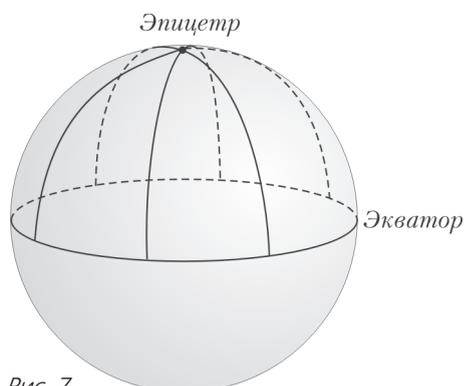
В четвертом параграфе последнего раздела мы обсудим еще несколько формулировок, равносильных теореме 2. А в следующем разделе мы приведем поистине удивительное рассуждение, которое с помощью теоремы 3 доказывает гипотезу Кнезера.

### 8. Доказательство гипотезы

Как мы уже говорили, первым гипотезу доказал Л. Ловас в 1977 году. Однако рассуждение, которое мы изложим ниже, предложил в 2002 году студент Джошуа Грин. В разделе 8.1 мы определим ряд вспомогательных понятий, а в разделах 8.2 и 8.3 проведем обещанное рассуждение.

#### 8.1. Вспомогательные понятия

Пусть  $\Pi$  – любая гиперплоскость в  $\mathbb{R}^d$ , проходящая через центр сферы  $S^{d-1}$ , т.е. через точку  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ . Тогда множество  $S^{d-1} \cap \Pi$  представляет собой сферу



$S^{d-2}$ . Для случаев  $d = 2$  и  $d = 3$  это наглядно очевидно. В первом случае мы пересекаем окружность с прямой и получаем две точки, но

$$S^0 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\} = \{-1, 1\},$$

и все в порядке. Во втором случае мы получаем окружность, и снова нет проблем. В общем случае картина аналогичная.

Любую сферу  $S^{d-2} = S^{d-1} \cap \Pi$  назовем *экватором* на сфере  $S^{d-1}$ . Множество точек сферы  $S^{d-1}$ , которые лежат по одну сторону от некоторого экватора, назовем *полусферой*. Если полусфера не включает в себя свой экватор, то она открыта, и мы будем явно говорить о ней как об *открытой полусфере*. Точку полусферы, которая равноудалена от всех точек соответствующего экватора, назовем *эпицентром* этой полусферы (рис. 7). Для данной точки  $\mathbf{x} \in S^{d-1}$  (открытая) полусфера  $H(\mathbf{x})$  с эпицентром в точке  $\mathbf{x}$  задается однозначно.

#### 8.2. Разместим элементы множества $\mathcal{R}_n$ на сфере

Нам хочется доказать, что  $\chi(KG_{n,k}) \geq n - 2k + 2$ . Предположим противное и придем в конечном счете к противоречию. Итак, допустим,  $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 1$ . Это означает, что каждой вершине кнезеровского графа (т.е. каждому множеству  $K_a \in \mathcal{K}$ ) присвоен некоторый цвет, причем всего цветов (в худшем случае)  $n - 2k + 1$  и вершины, соединенные ребром (т.е. множества  $K_a, K_b \in \mathcal{K}$  со свойством  $K_a \cap K_b = \emptyset$ ), покрашены в разные цвета. Введем обозначение  $d = n - 2k + 1$  и обозначим цвета, в которые покрашены вершины графа, через  $\chi_1, \dots, \chi_d$ .

Теперь рассмотрим множество  $\mathcal{R}_n$ , в котором «живут» все множества  $K_a \in \mathcal{K}$ , служащие вершинами кнезеровского графа. Каждому элементу этого множества мы хотим поставить в соответствие некоторую точку на сфере  $S^d$ , лежащей в  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Иными словами, мы хотим заменить множество натуральных чисел  $\mathcal{R}_n = \{1, \dots, n\}$  на множество точек  $\mathcal{X}_n = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ , считая, что каждому числу  $i \in \mathcal{R}_n$  соответствует точка  $\mathbf{x}_i$ . Разумеется, это можно сделать бесконечным количеством способов. Однако мы внесем одно важное дополнительное ограничение. А именно, мы потребуем, чтобы на любом экваторе сферы  $S^d$  лежало не более  $d$  точек из множества  $\mathcal{X}_n$ .

На первый взгляд, требование пугает, и неискушенному читателю должно показаться, что удовлетворить этому требованию очень трудно. В действительности все весьма просто, и мы сейчас попробуем (не вдаваясь, впрочем, в технические детали) создать интуицию того, что «почти всякое» расположение  $n$  точек на сфере  $S^d$  обладает нужным свойством.

Рассмотрим понятный и наглядный пример: положим  $d = 2$ . Тогда  $n = d + 2k - 1 \geq d + 1$ . Скажем,  $n = 3$ . Естественно, сейчас речь идет о размещении трех точек на обычной сфере  $S^2$  в трехмерном пространстве. Представим себе, что эти три точки мы выбираем наугад. Если угодно, мы закрываем глаза и, повертев пальцем в воздухе, тыкаем в случайную точку сферы (палец «бесконечно тонкий»). Это точка  $\mathbf{x}_1$ . Точно так

же находим точки  $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ . Давайте подумаем, с какой «вероятностью» эти точки улягутся на один экватор. Коль скоро точки  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  уже выбраны, они вместе с центром  $\mathbf{0}$  нашей сферы однозначно определяют некоторую плоскость  $\Pi$ . И окружность  $S^1 = \Pi \cap S^2$  – это тот самый *единственный* экватор, на котором одновременно лежат  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ . Стало быть, если мы хотим, чтобы точка  $\mathbf{x}_3$  попала на этот экватор, мы вынуждены выбирать ее из *одномерного* множества. Однако изначально выбор точки  $\mathbf{x}_3$  ничем ограничен не был, и мы вольны были тыкать в любую точку *двумерной* сферы. Ясно, что в любом разумном смысле вероятность попадания в одномерное подмножество при случайном выборе из двумерного множества равна нулю. Таким образом, мы и впрямь можем утверждать, что вероятность размещения трех точек на сфере  $S^2$  с условием, что все они не лежат на одном и том же экваторе, равна единице. А это и значит, по сути, что почти любое расположение точек  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  нас устраивает. Очевидно, при  $n > 3$  рассуждение по-прежнему в силе.

В общем случае работают совершенно аналогичные соображения. Ключевой момент ведь был в том, что любые три точки в  $\mathbb{R}^3$  однозначно задают плоскость. Так вот, в  $\mathbb{R}^{d+1}$ , где разворачиваются наши события, любые  $d + 1$  точек однозначно задают гиперплоскость. А это нам и нужно.

### 8.3. Применим теорему 3

Итак, мы выбрали на сфере  $S^d$  множество точек  $\mathcal{X}_n$ , и никакие  $d + 1$  точек из  $\mathcal{X}_n$  не лежат на одном экваторе. При этом  $\mathcal{X}_n$  находится во взаимно однозначном соответствии с  $\mathcal{R}_n$ . Это, в частности, означает, что каждому множеству  $K_a \in \mathcal{K}$  однозначно соответствует множество  $L_a \subset \mathcal{X}_n$ , имеющее мощность  $k$ . При этом мы можем считать, что  $L_a$  покрашено в тот же цвет, что и  $K_a$ , и, более того, если  $L_a \cap L_b = \emptyset$ , то и цвета множеств  $L_a, L_b$  различны.

Сейчас будет основной трюк. Мы чудесным образом увяжем все, о чем до сих пор шла речь, с теоремой 3. Для этого нам нужно будет покрыть сферу  $S^d$  некоторыми множествами  $A_1, \dots, A_{d+1}$ , часть из которых замкнута, а часть – открыта. Что ж, за дело.

Пусть  $\mathbf{x} \in S^d$ . Рассмотрим открытую полусферу  $H(\mathbf{x})$  с эпицентром в точке  $\mathbf{x}$ . Если в  $H(\mathbf{x})$  содержится меньше  $k$  точек из множества  $\mathcal{X}_n$ , то скажем, что точка  $\mathbf{x}$  принадлежит множеству  $A_{d+1}$ . Если же  $m = |H(\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n| \geq k$ , то в множество  $H(\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n$  попадает  $s = C_m^k$  множеств  $L_{a_1}, L_{a_2}, \dots, L_{a_s}$ . У каждого из них есть свой цвет  $\chi_j, j \in \{1, \dots, d\}$ . Соответственно, скажем, что точка  $\mathbf{x}$  принадлежит множеству  $A_j$  с каждым из индексов  $j$ , участвующих в упомянутой раскраске. Формально можно написать так:

$$A_{d+1} = \{\mathbf{x} \in S^d : |H(\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n| < k\},$$

$$A_i = \{\mathbf{x} \in S^d : \text{в } H(\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n$$

есть подмножество  $L_a$  цвета  $\chi_i\}$  при  $i = 1, \dots, d$ .

Разумеется, множества  $A_1, \dots, A_d$  могут иметь взаим-

ные пересечения. Однако очевидно, что  $S^d = A_1 \cup \dots \cup A_{d+1}$ , и наличие пересечений нас не смущает.

Надо еще понять, какие из множеств  $A_1, \dots, A_{d+1}$  замкнуты, а какие открыты. Пусть точка  $\mathbf{x}$  принадлежит любому из множеств  $A_i, i \in \{1, \dots, d\}$ . Это значит, что  $H(\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n$

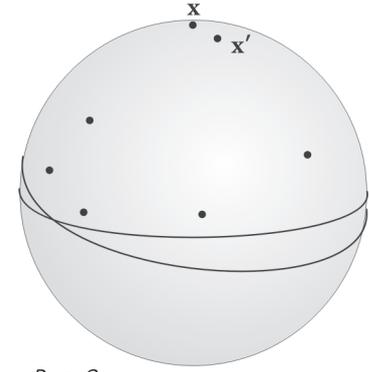


Рис. 8

представляет собой конечное множество точек  $U$  на сфере, причем, безусловно,  $U$  вложено в *открытое* множество  $H(\mathbf{x})$ . Если взять точку  $\mathbf{x}' \in S^d$ , достаточно близкую к  $\mathbf{x}$ , то нетрудно понять, что  $H(\mathbf{x})$  целиком накроет множество  $U$ . Наглядная иллюстрация этому факту дана на рисунке 8. Суть в том, что точки из  $U$  не лежат на экваторе полусферы  $H(\mathbf{x})$ . Именно поэтому можно столь мало пошевелить полусферу, чтобы и после этого шевеления точки из  $U$  не вышли на новый экватор или за его пределы. Таким образом, любая точка  $\mathbf{x}'$ , близкая (в известном смысле) к точке  $\mathbf{x}$ , принадлежит тому же множеству  $A_i$ , что и  $\mathbf{x}$ . Следовательно, множества  $A_i, i \in \{1, \dots, d\}$ , открыты. В то же время вся сфера  $S^d$  замкнута, а значит, множество  $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_d)$  тоже замкнуто (как разность замкнутого и открытого множества).

Применим теорему 3. Она говорит, что в одном из множеств  $A_1, \dots, A_{d+1}$  есть пара противоположных точек  $\mathbf{x}$  и  $-\mathbf{x}$ . Рассмотрим два случая: в первом случае  $\mathbf{x} \in A_i$ , где  $i \in \{1, \dots, d\}$ ; во втором случае  $\mathbf{x} \in A_{d+1}$ .

*Случай 1.* В этом случае полусферы  $H(\mathbf{x})$  и  $H(-\mathbf{x})$  содержат множества  $L_a$  и  $L_b$  соответственно, каждое из которых имеет цвет  $\chi_i$  (раз уж и  $\mathbf{x}$ , и  $-\mathbf{x}$  сидят в одном и том же  $A_i$ ). Но полусферы  $H(\mathbf{x})$  и  $H(-\mathbf{x})$  не пересекаются (они ведь не содержат общего экватора), а стало быть, не пересекаются и множества  $L_a, L_b$ . Так ведь у нас непересекающиеся множества не могут быть одного цвета! Противоречие.

*Случай 2.* В этом случае  $|H(\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n| \leq k - 1$  и  $|H(-\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n| \leq k - 1$ . Обозначим через  $S$  общий экватор полусфер  $H(\mathbf{x})$  и  $H(-\mathbf{x})$ . Тогда

$$|S \cap \mathcal{X}_n| = |\mathcal{X}_n| - |H(\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n| - |H(-\mathbf{x}) \cap \mathcal{X}_n| \geq$$

$$\geq n - (k - 1) - (k - 1) = n - 2k + 2 = d + 1,$$

т.е. на экваторе  $S$  лежит не меньше  $d + 1$  точек, что также невозможно. Опять противоречие, и гипотеза Кнезера доказана.

## 9. Дополнение

Для понимания этого раздела потребуется слегка больше навыков, чем прежде. Например, необходимо знать определения непрерывной функции и непрерывного отображения. Следует знать также, что непрерыв-

ная функция достигает своего максимального (минимального) значения на замкнутом множестве. Понадобится представление о связности множеств. Но это и все, пожалуй.

**9.1. Доказательство теоремы 2 при  $d = 2$**

Пусть окружность  $S^1$  покрыта двумя замкнутыми множествами  $A_1, A_2$ , не содержащими противоположных точек. Возьмем некоторую точку  $x \in A_1$ . Тогда  $-x \in A_2$ . На любой из дуг, соединяющих точки  $x$  и  $-x$ , найдем *последнюю* точку  $y$  множества  $A_1$ . Это можно сделать, поскольку  $A_1$  замкнуто и  $-x \notin A_1$ . Ясно, что  $y$  лежит и в  $A_2$ , ведь иначе за ней были бы еще точки множества  $A_1$ . Но тогда  $-y$  не может принадлежать ни  $A_1$ , ни  $A_2$ . Противоречие, и теорема доказана.

**9.2. Доказательство теоремы 2 при  $d = 3$**

Предположим,  $S^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , причем все множества  $A_i$  замкнуты и, вопреки утверждению теоремы, ни одно из них не содержит пары противоположных точек сферы. Наша цель – прийти к противоречию.

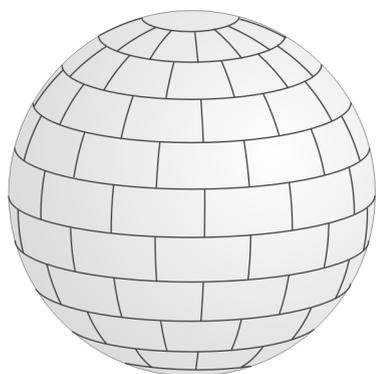


Рис. 9

Разобьем сферу на очень маленькие кирпичики и две шапочки, как показано на рисунке 9. Чуть позже мы скажем, что именно означает выражение «очень маленькие». Все кирпичики одинаковы, шапочки тоже совпадают по форме, и для дальнейшего крайне важно, что мы располагаем

кирпичики на сфере в стиле обычной кирпичной кладки: мы будем существенно опираться на то, что ни в одной точке сферы не сходятся сразу четыре отрезка, служащие границами кирпичиков (ситуация, показанная на рисунке 10, невозможна).

Объединим все кирпичики, каждый из которых имеет хотя бы одну общую точку с множеством  $A_1$ . Полученное множество назовем  $B_1$ . Аналогично поступим с  $A_2$  и  $A_3$ , образуя множества  $B_2$  и  $B_3$  соответственно. Поскольку множества  $A_i$  замкнуты, то, выбрав кирпичики с самого начала достаточно мелкими, мы добьемся того, что и множества  $B_i$  не будут содержать противоположных точек сферы.

Разумеется,  $S^2 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ . Рассмотрим пока только множество  $B_1$ . Его граница – это система ломаных линий на сфере. Назовем эти ломаные  $L_1, \dots, L_k$ , где  $k$  – это просто обозначение для числа наших ломаных. Благодаря способу укладки кирпичиков на сфере, мы можем утверждать, что любая из ломаных замкнута, не пересекает саму себя и не пересекается ни с одной из оставшихся ломаных. Именно ради этого мы так старательно избегали ситуаций, показанных на рисунке 10. В итоге граница множества  $B_1$  имеет весьма приятный вид, чего нельзя было сказать, вообще-то, о гра-



Рис. 10

нице исходного множества  $A_1$ . Затевая кирпичную кладку и заменяя  $A_1$  на  $B_1$ , мы как раз стремились к тому, чтобы от одного замкнутого множества без противоположных точек перейти к другому замкнутому множеству без противоположных точек, улучшив при этом свойства границы множества.

Отразим множество  $B_1$  относительно центра сферы. Получится множество  $B'_1$ , которое не пересекается с множеством  $B_1$ , так как иначе в  $B_1$  нашлись бы противоположные точки сферы. Граница множества  $B'_1$  образована ломаными  $L'_1, \dots, L'_k$ , которые симметричны ломаным  $L_1, \dots, L_k$ . Итого у нас на сфере есть уже  $2k$  ломаных, которые замкнуты, не пересекают самих себя и не пересекаются друг с другом. Хорошо известно, что

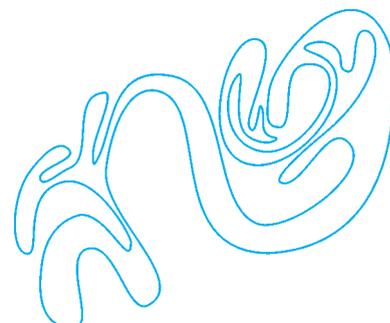


Рис. 11

такие ломаные делят сферу на  $2k + 1$  связных кусков. Этот факт интуитивно понятен: одна замкнутая ломаная разбивает сферу на два куска, две замкнутые ломаные разбивают сферу на три куска и т.д. В действительности, этот факт крайне нетривиален, ведь замкнутая ломаная может быть сколь угодно сложной (рис. 11). Он называется теоремой Жордана. Однако мы применим этот факт, по-прежнему надеясь на интуицию читателя.

Итак, на сфере есть  $2k + 1$  связных множеств, которые ее покрывают. По построению, среди этих множеств могут быть либо пары множеств, симметричных друг другу, либо множества, которые симметричны относительно центра сферы. Поскольку  $2k + 1$  – нечетное число, хотя бы одно центрально-симметричное множество найдется. Назовем его  $C$ . Ясно, что  $C \subset (B_2 \cup B_3)$ .

В множестве  $C$  есть, конечно, пары противоположных точек сферы. Возьмем любую из них: скажем,  $y$  и  $-y$ . Ввиду связности множества  $C$ , существует непрерывная кривая  $\gamma$ , соединяющая точки  $y$  и  $-y$  и целиком лежащая внутри множества  $C$ .

Дальнейшее рассуждение полностью повторяет рассуждение из параграфа 9.1: *непрерывная* кривая  $\gamma$  – это точный аналог дуги окружности, и она покрыта только множествами  $B_2$  и  $B_3$ . Приходим к противоречию, и теорема доказана.

**9.3. Покрытие окружности и двумерной сферы**

Здесь мы хотим разобраться с тем, как можно покрыть окружность  $S^1$  тремя, а сферу  $S^2$  – четырьмя замкнутыми множествами без противоположных точек.

С окружностью все тривиально. Покрытие имеет вид значка «Мерседеса», и оно изображено на рисунке 12. Очевидно, что в каждом из секторов нет противоположных точек. Более того, максимальное расстояние между парами точек в любом из секторов (оно называ-

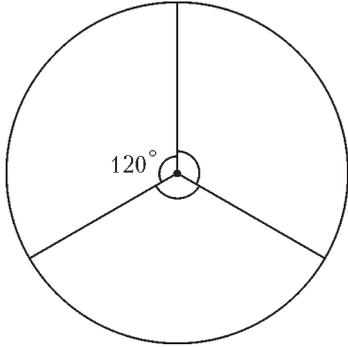


Рис. 12

на каждую из сторон треугольника и получаем те самые три сектора, которые покрывают  $S^1$ .

Последнее рассуждение полезно с той точки зрения, что в случае  $\mathbb{R}^3$  мы его обобщим, и, тем самым, трехмерная конструкция окажется понятнее.

Итак, впишем в  $S^2$  правильный тетраэдр, служащий естественным аналогом правильного треугольника. Посмотрим из центра на каждую из его четырех граней. Получатся трехгранные углы с общей вершиной в центре сферы (рис. 13). Каждый из углов имеет в сечении одну из граней тетраэдра. Пересечения углов со сферой и суть искомые четыре замкнутых множества, покрывающие сферу. Ясно, что все эти множества геометрически одинаковы. В сущности, ясно и то, что такие множества не содержат противоположных точек сферы. Интереснее подсчитать их диаметры.

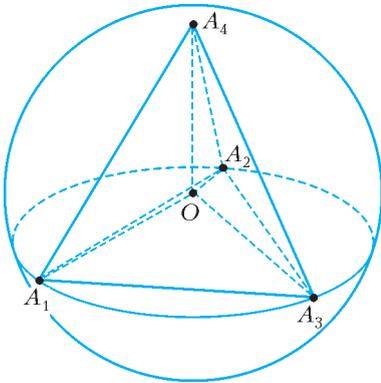


Рис. 13

Заметим, что в случае плоскости диаметры искались тривиально: максимум расстояний в секторах достигался на парах вершин вписанного треугольника. Возникает гипотеза, что и в трехмерной ситуации следует просто найти длину стороны тетраэдра. Однако такая интуиция неверна, и это здесь самое забавное.

Дабы описать положения наиболее удаленных точек данного множества в покрытии сферы, введем некоторые обозначения. Пусть вершины тетраэдра – это  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , а его центр – это  $O$  (см. рис. 13). Для определенности рассмотрим множество, порожденное трехгранным углом  $OA_1A_2A_3$ . Пусть  $B$  – середина стороны  $A_2A_3$ . Проведем через точку  $B$  радиус  $OC$ . Утверждение состоит в том, что диаметр – это длина отрезка  $A_1C$ . Мы не станем доказывать этот несложный факт, оставляя читателю хорошую пищу для размышлений.

Посчитать длину отрезка  $A_1C$  большого труда не составляет. Давайте все же сделаем это. Прежде всего найдем длину  $x$  стороны тетраэдра. Рассмотрим высоту тетраэдра, опущенную из вершины  $A_4$  на

плоскость  $A_1A_2A_3$ . Обозначим ее основание через  $D$ . Понятно, что  $D$  – центр окружности, описанной вокруг треугольника  $A_1A_2A_3$ . Длина отрезка  $DA_1$  равна  $\frac{x}{\sqrt{3}}$  (по теореме косинусов). Значит, высота  $A_4D$  имеет длину  $\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{3}} = x\sqrt{\frac{2}{3}}$  (по теореме Пифагора).

В то же время  $OD = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$ . В итоге  $x\sqrt{\frac{2}{3}} = 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$ , так что  $x = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Далее, по теореме Пифагора  $DB = \sqrt{\frac{2}{9}}$  и  $OB = \sqrt{\frac{1}{3}}$ . Мы знаем длины всех сторон треугольника  $OA_1B$  ( $OA_1 = 1$ ,  $OB = \sqrt{\frac{1}{3}}$ ,  $A_1B = \sqrt{2}$ ). По теореме косинусов косинус угла  $A_1OB$  равен  $-\sqrt{\frac{1}{3}}$ .

Берем треугольник  $A_1OC$  и по теореме косинусов находим

$$A_1C = 2\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} \approx 1,776... < 2.$$

#### 9.4. Вокруг теоремы 2

Полезно понимать, что следующая формулировка равносильна утверждению теоремы 2.

**Теорема 4.** Для любого непрерывного отображения  $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  существует точка  $\mathbf{x} \in S^d$  с  $f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ .

В двумерном случае теорема 4 говорит о том, что нельзя непрерывно растянуть обычную сферу на обычную плоскость, не склеив при этом какие-нибудь две противоположные точки. Интуитивно это довольно понятно, а доказательство, по очевидным причинам, то же самое, что и в параграфе 9.2. Ниже мы объясним, как из теоремы 4 вывести теорему 2. Рассуждение в обратную сторону мы предложим читателю в качестве упражнения.

Итак, пусть теорема 4 верна. Рассмотрим произвольное покрытие  $S^d = A_1 \cup \dots \cup A_{d+1}$  сферы замкнутыми множествами. Нам хочется доказать, что найдется индекс  $i$  и такая точка  $\mathbf{x} \in A_i$ , что  $-\mathbf{x} \in A_i$ . Построим отображение  $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  по следующему правилу:

$$f(\mathbf{x}) = (\text{dist}(\mathbf{x}, A_1), \dots, \text{dist}(\mathbf{x}, A_d)).$$

Здесь  $\mathbf{x} \in S^d$ , а  $\text{dist}(\mathbf{x}, A_i) = \min_{\mathbf{y} \in A_i} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  (минимум достигается, поскольку множество  $A_i$  замкнуто).

Очевидно, отображение  $f$  непрерывно. Из теоремы 4 мы, стало быть, знаем, что для некоторой точки  $\mathbf{y} \in S^d$  выполнено  $f(\mathbf{y}) = f(-\mathbf{y})$ . Если  $i$ -я координата точки  $\mathbf{y}$  равна нулю, то  $\text{dist}(\mathbf{y}, A_i) = 0$ , т.е.  $\mathbf{y} \in A_i$ , а значит, и

$-\mathbf{y} \in A_i$ . Если же все координаты у точки  $\mathbf{y}$  ненулевые, то  $\mathbf{y}$  не принадлежит ни одному из множеств  $A_i$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$ , т.е.  $\mathbf{y} \in A_{d+1}$ . Но тогда и  $-\mathbf{y} \in A_{d+1}$ . В обоих случаях все доказано.

Назовем отображение  $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  *антиподальным*, если  $f$  непрерывно и для любого  $\mathbf{x} \in S^d$  выполнено  $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ . Вот еще один важный вариант теоремы 2:

**Теорема 5.** *Не существует антиподального отображения  $f: S^d \rightarrow S^{d-1}$ .*

Равносильность теорем 5 и 4 почти тривиальна, и мы ее не обсуждаем. Зато, отталкиваясь именно от теоремы 5, очень удобно получать обобщения результата Борсука–Улама–Люстерника–Шнирельмана. Одно из таких (наиболее широких и важных) обобщений мы приведем ниже, не комментируя терминологию, которая в его рамках возникает. Читатель, знающий продвинутую алгебру, поймет, о чем речь, а читатель, который с подобными вопросами еще не знаком, получит стимул к дальнейшему изучению науки.

**Теорема 6.** *Пусть  $G$  – нетривиальная конечная группа, которая действует свободно на топологических пространствах  $X$  и  $Y$ . Предположим, что  $X$  – это  $(n - 1)$ -связное пространство, а размерность пространства  $Y$  равна  $m < n$ . Тогда не существует  $G$ -эквивариантного отображения из  $X$  в  $Y$ .*

Следовало наложить некоторые дополнительные ограничения на пространства  $X$ ,  $Y$  в формулировке теоремы, но мы не стали этого делать, дабы совсем уж не загромождать утверждение. Можно считать, что  $X$  и

$Y$  – «достаточно хорошие». Например, если  $X = S^n$ , а  $Y = S^m$ , то  $X$  имеет связность  $n - 1$ , а  $Y$  имеет размерность  $m$ . Если к тому же  $G = \mathbb{Z}_2$ , то  $G$ -эквивариантность и антиподальность отображения суть одно и то же. Таким образом, при  $X = S^n$ ,  $Y = S^{n-1}$ ,  $G = \mathbb{Z}_2$  теорема 6 влечет теорему 5.

**Список литературы**

1. Н.Алон, Дж.Спенсер. Вероятностный метод. – М.: Бином, Лаборатория знаний, 2007.
2. А.М.Райгородский. Вероятность и алгебра в комбинаторике. – М.: МЦНМО, 2008.
3. А.М.Райгородский. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. – М.: МЦНМО, 2007.
4. А.Я.Хинчин. Три жемчужины теории чисел. – М.: Наука, 1979.
5. J. Matoušek. Using the Borsuk – Ulam theorem. – Universitext, Springer, Berlin, 2003.
6. Н.Стиррод, У.Чинн. Первые понятия топологии. – М.: Мир, 1967.
7. В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович. Наглядная топология. – М.: Наука, 1982.
8. Ф.Харари. Теория графов. – М.: Мир, 1973.
9. М.Г.Крейн, А.А.Нудельман. Теорема Борсука – Улама, или Кое-что о погоде, о дрессированной лошади и двумерных полях. – Квант, 1983, №8, с.20–25.
10. В.Г.Болтянский, И.Ц.Гохберг. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. – М.: Наука, 1965.
11. А.М.Райгородский. Проблема Борсука. – М.: МЦНМО, 2006.

ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

Как увидеть 50 Гц?

(Начало см. на 4-й странице обложки)

...Подсоедините к контактам «+» и «-» светодиода два тонких изолированных провода длиной около двух метров каждый и скрутите их. Утяжелите светодиод чем-нибудь и прикрепите середину скрученного провода, например, к книжной полке. Вы получите светодиодный маятник длиной 1 м. Теперь свободные концы проводов, идущих от светодиода, подсоедините к источнику переменного тока частотой 50 Гц и напряжением 3–4 В, светодиод начнет светиться.

Однако светодиод, как и любой другой диод, пропускает ток только в одном направлении, т.е. 10 мс он светится, а

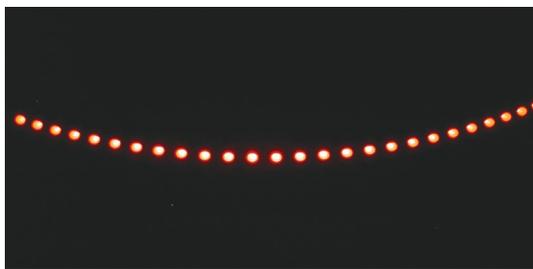


Рис. 1

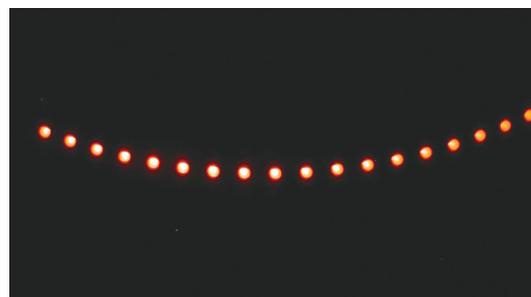


Рис. 2

следующие 10 мс – нет. Чтобы увидеть мелькание светодиода с частотой 50 Гц, достаточно раскачать светодиодный маятник. Как только скорость маятника станет выше 1 м/с, вы увидите светящуюся пунктирную линию, вместо сплошной. Особенно хорошо это видно в темноте.

На рисунках 1 и 2 приведены фотографии части траектории такого светодиодного маятника, сделанные с экспозицией 0,5 с. Горизонтальный размер этого участка траектории составляет 0,8 м. Нетрудно убедиться в том, что средняя скорость маятника на рисунках равна 1,6 м/с и 2,2 м/с.

К.Богданов

# Спагетти и... физика

А.ВАРЛАМОВ

*Воспеваю, прославляю  
Раскрасавца макарона...  
Я вкушаю, обожаю,  
Трепещу, благоговею,  
Насыщаюсь, наслаждаюсь  
И от пищи сладко млею...*

Филиппо Сгруттендио  
(неаполитанский поэт и обжора, XVII в.).  
Похвальное слово макаронам

**Б**ЕЗУСЛОВНО, КАЖДЫЙ ЗНАЕТ, ЧТО ТАКОЕ СПАГЕТТИ, и наверняка многие читатели варили их сами. Однако задумывались ли вы о тех физических процессах, которые происходят во время варки и в результате которых на столе появляется правильно сваренная паста (так итальянцы называют любые макаронные изделия)? Например, что происходит внутри спагетти, пока они плавают в кипящей воде? Почему следует строго следить за соблюдением времени готовки, указанном на упаковке? Почему эти времена так сильно различаются для разных типов пасты? Как влияет форма продукта – классические спагетти разных диаметров, ригаттони, букатини и т.д. – на время варки? Зависит ли время приготовления пасты от того, готовите ли вы ее на морском побережье или высоко в горах? Почему сухая спагеттина при сгибании почти никогда не ломается на две части, а распадается как минимум на три куска? Почему спагетти в процессе варки не завязываются в узлы? Как выбирать тип пасты под имеющийся соус, чтобы она получилась вкусной и горячей?

Все эти вопросы в разное время привлекали внимание исследователей. Мы постараемся вникнуть в физику процесса варки спагетти и найти ответы на некоторые вопросы, которые могут возникнуть и у любознательного читателя.

## Немного из истории производства пасты

Вопреки общепринятому мнению, паста не была завезена в Европу венецианцем Марко Поло, совершившим путешествие в Китай во второй половине 13 века. В действительности ее история началась на побережье Средиземного моря намного раньше, практически с тех времен, когда человек, оставив кочевой образ жизни, начал выращивать зерно и употреблять его в пищу. Первые лепешки, печеные на раскаленных камнях, упоминаются еще в Библии и в других древних текстах. В первом тысячелетии до Рождества Христова греки уже производили пасту в форме тонких слоев и называли ее «laganon». Этот термин до древних римлян дошел в виде «laganum» и, по-

видимому, является предшественником современной лазаньи.

По мере становления Римской империи паста получает распространение в Западной Европе. Использование пасты как формы консервации зерновых продуктов возникает из-за необходимости перевозить с собой провиант при перемещении племен. Прародителем спагетти возможно стала сицилийская паста, выполненная в форме тончайших полосок и происходящая, в свою очередь, от арабской порезанной полосками лепешки. Ее начали производить в Палермо в начале второго тысячелетия. Основываясь на подробном завещании, заверенном генуэзским нотариусом, можно с уверенностью утверждать, что к 1280 году в Лигурии уже употреблялись макароны. Из истории итальянской литературы известно, что паста привлекала внимание многих писателей, а в «Декамероне» Джованни Баккаччо макароны становятся символом изысканного деликатеса.

Первые цеха производителей пасты со своими уставами возникают в Италии в 16 веке и получают политическое и общественное признание. В те времена макароны являются явством для богатых, особенно в регионах, где не хватает своего производства твердых сортов пшеницы, например в Неаполе. Изобретение механического пресса приводит к удешевлению производства пасты и снижению ее цены. В результате в 17 веке паста становится одним из основных продуктов питания всех социальных классов и широко распространяется по всем странам средиземноморского бассейна. А Неаполь становится центром производства и экспорта макаронных изделий. Здесь паста, заправленная томатным соусом с базиликом или посыпанная тертым сыром, продается на каждом углу. В северной Италии паста получает массовое распространение в конце 18 века, в большой степени благодаря открытию в Парме небольшой фабрики, которая впоследствии становится одним из столпов пищевой промышленности Италии.

Современные методы производства пасты основаны на использовании процессов экструзии и волочения. Экструзия – непрерывное выдавливание размягченного материала через отверстие определенного сече-

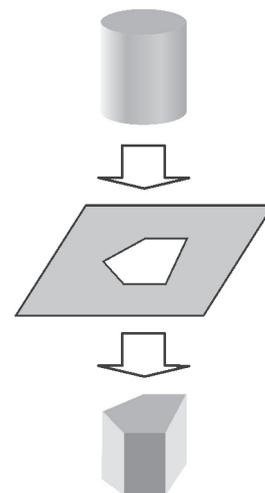


Рис.1. Иллюстрация процесса экструзии



Рис.2. Фильтра (волока) для изготовления спагетти

ния – была изобретена и впервые применена для изготовления длинномерных металлических изделий с заданным сечением (рис.1). Процесс экструзии основан на свойстве текучести материалов и осуществляется при их продавливании сквозь более жесткую форму посредством сжатия. Он может проводиться как в холодном, так и в горячем режиме. Волочение – это процесс, подобный экструзии. Единственное существенное различие заключается в том, что при волочении материал продавливается через форму, расположенную на выходе из сосуда, и, таким образом, является скорее процессом растяжения, чем сжатия. В металлообрабатывающей промышленности таким способом производятся цилиндры, трубы и проволока. Металлическая проволока при этом может быть доведена до диаметра 0,025 мм. Другие материалы, в обработке которых используются экструзия и волочение, это полимеры, керамика и... продукты питания (рис.2).

### О варке спагетти по-научному

Прежде всего давайте поймем, в чем заключается процесс варки пасты. Содержащиеся в муке молекулы крахмала сгруппированы в гранулы диаметром 10–30 мкм, которые, в свою очередь, окружены различными протеинами. В процессе приготовления пасты два из них, соприкасаясь с водой, объединяются и образуют непрерывную сетку – клейковину, упругую и плохо проницаемую для молекул воды. Эта сетка покрывает собой гранулы крахмала. Время варки непосредственно зависит от способности молекул крахмала, окруженных клейковиной, впитывать воду, которая при помещении пасты в кастрюлю начинает проникать сквозь клейковинную сетку и диффундировать к центру спагеттины. Уже при температуре около 70 °С молекулы крахмала начинают образовывать желеобразное соединение, которое задерживает проникновение воды. Приготовление спагетти должно быть завершено в тот момент, когда желеобразный крахмал в пасте уже впитал минимальное количество воды, необходимое для того, чтобы сделать ее достаточно мягкой.

Таким образом, одно из необходимых условий для приготовления пасты состоит в том, что температуру внутри спагетто следует увеличить до некоторой определенной величины, в случае пасты до 70 °С. Второе условие – внутрь изначального сухого спагетто должна продиффундировать вода. Оба эти условия должны быть выполнены за время процесса варки. Действительно, ни разогрев сухих спагетти в печи, ни длительное держание их в холодной воде не приведет к появлению на столе тарелки аппетитной пасты.

Если аккуратно записать уравнение теплопередачи и уравнение диффузии и воспользоваться безусловно знакомым вам методом размерностей, то получим, что время приготовления спагетти  $\tau_{\text{сп}}$  связано с диаметром спагетто  $D$  соотношением

$$\tau_{\text{сп}} = aD^2 + b.$$

Коэффициент  $a$  определяется физическими свойствами пасты – ее теплопроводностью и коэффициентом диффузии, в то время как коэффициент  $b$  характеризует... национальность едока. В самом деле, если первое слагаемое в формуле определяет время доставки воды и необходимого тепла к центру спагетто, то второе говорит нам, как долго центральная часть пребывает под воздействием этих факторов. Вот почему итальянцы, которые предпочитают есть пасту в степени готовности «на зубок» (с нашей точки зрения, несколько недоваренной), процесс желеобразования крахмала в пасте доводят до конца не по всему объему, а так, что в центре он остается относительно твердым. В результате, как мы увидим ниже, коэффициент  $b$  в этом случае оказывается отрицательным. В других странах любители спагетти считают, что паста должна быть хорошо разварена, поэтому время, которое они варят пасту, может существенно превышать указанное на упаковке итальянским производителем время.

Давайте теперь отправимся в супермаркет и купим всю необходимую для эксперимента гамму пасты цилиндрической формы: капеллини, спагеттини, спагетти, вермишель, букатини... Далее, прочитаем и занесем в таблицу рекомендованные времена варки (колонка «экспериментальное время варки»). Затем возьмем штангенциркуль и измерим соответствующие диаметры, занесем их также в таблицу (колонки «внешний/внутренний диаметр»).

Для нахождения численных значений коэффициентов  $a$  и  $b$  достаточно использовать данные из двух строк нашей таблицы и решить соответствующую систему двух простых уравнений. Выберем данные для спагеттини №3 и вермишели №8 и получим

$$a = \frac{t_2 - t_1}{D_2^2 - D_1^2} = 3,4 \text{ мин/мм}^2,$$

$$b = \frac{D_2^2 t_1 - D_1^2 t_2}{D_2^2 - D_1^2} = -2,3 \text{ мин}.$$

Паста, которую мы купили, – итальянская, поэтому и рекомендованные времена приготовления соответствуют итальянскому вкусу, т.е. пасте, приготовленной «на зубок». В результате коэффициент  $b$  оказывается отрицательным.

Таблица

Тип пасты	Внешний диаметр $D$ , мм	Внутренний диаметр $d$ , мм	Экспериментальное время варки $t$ , мин	Теоретическое время варки $\tau$ , мин
Капеллини №1	1,15		3	2,2
Спагеттини №3	1,45		5	5,0
Спагетти №5	1,75		8	8,1
Вермишель №7	1,90		11	10,0
Вермишель №8	2,10		13	13,0
Букатини	2,70	1,00	8	22,5?!

Имея на руках численные значения коэффициентов  $a$  и  $b$ , мы можем проверить, как наша формула работает для различных типов пасты цилиндрической формы. Результаты наших вычислений приведены в последней колонке таблицы, и читатель может убедиться в прекрасном согласии между теорией и экспериментом во всех строках таблицы за исключением двух крайних: для капеллини №1 и букатини. Здесь мы сталкиваемся с типичной для теоретической физики ситуацией: предсказание некоторой теории имеет свои пределы применимости, зависящие от сделанных при построении этой теории упрощений.

Посмотрим, например, на последнюю строку таблицы: для букатини различие между теоретическим и экспериментальным временами оказывается вопиющим – 22,5 мин вместо 8 мин! Такое расхождение указывает на интересный факт: диапазон возможных толщин всей гаммы цельной цилиндрической пасты (капеллини, спагетти, вермишель) оказывается весьма узким, составляя всего лишь 1 мм. Действительно, вычисление времени приготовления букатини в приближении однородного цилиндра с диаметром 2,70 мм дает 22,5 мин – за это время внешняя часть такого толстого спагеттоне просто превратится в кашу. Выход из положения был найден эмпирически: в цилиндре вдоль его оси следует сделать дырку. В эту дырку при варке проникает горячая вода, и необходимость долгого ожидания, пока тепло через внешние стенки дойдет до центра, отпадает. Наличие такой дырки можно попробовать учесть в нашей формуле простым вычитанием внутреннего диаметра из внешнего, пренебрегая при этом эффектом потока тепла, идущего в объем сквозь внутреннюю стенку (подумайте, почему это возможно). Эта модификация немедленно приближает теоретический результат к действительности:

$$\tau = a(D - d)^2 + b \approx 7,5 \text{ мин.}$$

Тем не менее, следует иметь в виду, что дырка в пасте не должна быть менее 1 мм в диаметре, в противном случае вода не сможет в нее проникнуть из-за капиллярного давления  $p_{\text{кап}} = \sigma(100^\circ\text{C})/d \approx 50 \text{ Па}$ , что соответствует высоте столба воды в несколько сантиметров над варящейся пастой.

Отклонение теории от практики иного рода происходит для очень тонкой пасты. Причина этой ошибки очевидна: говоря о приготовлении пасты, мы выбрали параметр  $b$  отрицательным:  $b = -2,3 \text{ мин}$ . Формально это означает, что может существовать столь тонкая паста, что ее можно есть вообще без варки. Соответ-

ствующий критический диаметр находится из соотношения  $0 = aD_{\text{кр}}^2 + b$ , откуда

$$D_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{-b}{a}} \approx 0,82 \text{ мм.}$$

Как видно, реальный диаметр капеллини (1,15 мм) не слишком отличается от этой критической величины, поэтому недооценка времени приготовления капеллини в таблице является результатом упрощения нашей модели.

### Заузливание спагетти

Отваренные спагетти, перепутанные друг с другом, представляют собой сложный клубок, однако автор никогда не видел, чтобы спагетти заузливались сами собой. Понять, почему этого не происходит, помогут достижения нового направления статистической механики – статистики полимеров.

Оказывается, что вероятность самозаузливания длинной полимерной цепочки определяется выражением

$$w = 1 - \exp\left(-\frac{L}{\gamma l_{\text{хар}}}\right),$$

где  $L$  – полная длина цепочки,  $l_{\text{хар}}$  – характерная длина, на которой полимер может изменить свое направление на  $\pi/2$ , и, наконец,  $\gamma \approx 300$  – большой численный коэффициент, полученный в результате численного моделирования и в некоторых упрощенных теоретических моделях. Применяя эту формулу к спагетти, для которой  $l_{\text{хар}} \approx 2 - 3 \text{ см}$ , можно оценить длину  $L_{\text{min}}$ , при которой вероятность самопроизвольного заузливания стала бы заметной, скажем  $w = 0,1$ :

$$L_{\text{min}} = \gamma l_{\text{хар}} \ln 1,1 \approx 30 l_{\text{хар}} \approx 60 - 90 \text{ см.}$$

Стандартная длина спагетти равна 23 см, и этого оказывается недостаточно для образования узлов.

### Сочетание типа пасты и вязкости соуса

Правила хорошего тона предписывают начинать еду одновременно всем сидящим за столом. Однако за итальянским столом исключение делается для первого блюда – пасты. Ее начинают есть в тот момент, как только тарелка появляется на столе. Паста должна быть горячей! Впрочем, паста попадает на стол не прямо из кастрюли с кипящей водой – предварительно ее сбрасывают на дуршлаг и перемешивают с соусом.

Понятно, что этот процесс занимает некоторое время и может оказаться длительным. Тогда паста остынет, и удовольствие уже будет не то.

Для того чтобы понять, какое время требуется для перемешивания соуса и пасты, начнем с простой модели: пусть вязкая жидкость протекает сквозь цилиндр под действием силы тяжести (это образ макаронины, в которую втекает соус). Стационарный поток  $Q$  жидкости в трубе диаметром  $D$  при разности давлений на входе и выходе  $\Delta p$  определяется известной формулой Пуазейля

$$Q = \frac{\pi \rho \Delta p D^4}{128 l \eta},$$

где  $\eta$  – коэффициент вязкости жидкости,  $\rho$  – ее плотность, а  $l$  – длина трубы. С другой стороны, величина потока по определению есть масса жидкости, протекающей через сечение трубы за единицу времени:

$$Q = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \frac{\pi D^2 \Delta l}{4 \Delta t}.$$

Сравнивая эти два выражения для  $Q$  и приписывая разность давлений действию силы тяжести:  $\Delta p = \rho g l$ , находим

$$\frac{\Delta t}{\Delta l} = \frac{32 \eta}{\rho g D^2}.$$

Мы видим, что скорость, с которой вязкая жидкость заполняет трубу, пропорциональна комбинации  $\eta/D^2$ . Эта формула получена в модели течения жидкости в поле тяжести сквозь вертикально расположенную трубу, поэтому в ответ входит ускорение свободного падения  $g$ . Впрочем ясно, что природа ускорения несущественна: с тем же успехом место  $g$  в этой формуле займет и ускорение, получаемое пастой при ее перемешивании ложкой.

Мы рассмотрели течение жидкости внутри одной трубы. Однако понятно, что если плотно составить несколько труб рядом, то жидкость между трубами будет течь приблизительно с той же скоростью, что и внутри них. Таким образом, мы приходим к выводу, что характерное время перемешивания пасты

$$\tau_{\text{пер}} \sim \frac{\eta}{D^2},$$

т.е. чем больше вязкость соуса, тем большего поперечного размера пасту следует выбирать. Так, не удастся хорошо и быстро перемешать тончайшие капеллини с густым генуэзским песто – с ним сочетаются короткие и толстые трюфи, а с огромных паккери жидкий томатный соус просто стечет на дно тарелки, поэтому лучше оставить в нем помидоры черри неразмельченными и обогатить соус кусочками цукини и креветками.

Полученная формула для  $\tau_{\text{пер}}$  помогает также понять эмпирические правила итальянской кухни. Обычно паста и соус готовятся одновременно – паста в кастрюле, а соус на сковороде. У хорошего повара они приходят к состоянию готовности почти одновременно. Сбросив пасту на дуршлаг и сцедив воду, он отправляет ее на сковороду, где и перемешивает пасту с соусом. Вязкость заметно падает с температурой, поэтому

время перемешивания пасты с соусом, кипящим на сковороде, будет существенно меньше, чем если бы соус достали из холодильника. Кроме того, паста не теряет тепло при теплообмене с соусом. И еще одна тонкость. Паста в кастрюле чуть-чуть не доваривается по сравнению с рекомендуемым на упаковке временем, а на сковороде, при перемешивании с соусом, она продолжает вариться и добирает недостающие минуты, чтобы достичь кондиции «на зубок».

### Как ломается спагетто

В начале статьи было упомянуто еще одно интересное свойство спагетти, связанное с его механическим разрушением. Возьмите спагеттину за концы и изогните ее в дугу. Представляется очевидным, что при дальнейшем изгибе рано или поздно она в районе середины разломается на две части. Оказывается, в этом случае интуиция нас подводит – обломков всегда три и более.

Такое необычное свойство спагетти привлекло внимание многих ученых, среди которых был и Ричард Фейнман. И только совсем недавно, в августе 2005 года, благодаря исследованию французских физиков Одули и Некрича появилось количественное объяснение этого явления, которое, возможно, найдет свое дальнейшее развитие в науке о сопротивлении материалов. Ученые исследовали поведение тонкого упругого стержня под воздействием деформации изгиба. Для этого они сначала воспользовались известным уравнением Кирхгофа, записав его для искривленного упругого стержня с двумя закрепленными концами. Затем они изучили, что произойдет с распределением напряжений в стержне при его разломе в произвольной точке. Решение оказалось возможно найти лишь численно, но и это позволило понять физику явления.

Допустим, что в результате приложенного механического напряжения изгиба в самом слабом месте спагеттины происходит первый излом. Казалось бы, после этого образовавшиеся части должны вернуться к своим положениям равновесия. Однако этот процесс происходит весьма сложным и неоднозначным образом. Сразу же после первого излома в обеих частях стержня возникают упругие волны изгиба, которые распространяются вдоль них. Эти волны приводят к возрастанию в определенных областях стержня локального напряжения изгиба по сравнению с уже имеющимся статическим изгибом, предшествующим первому излому. В результате в местах сгущения изгибного напряжения могут происходить дальнейшие изломы стержня. Конечно, упругие волны, порожденные первым изломом, затухают со временем, однако при определенном соотношении между длиной стержня и его упругими свойствами они могут привести к последующим разломам стержня. Интересно, что, проведя сложные расчеты, ученые убедились в правильности своих выводов с помощью замедленной съемки экспериментов со... спагетти.

Поэкспериментируйте и вы, пока варятся ваши макароны.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1–2011» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2206» или «Ф2213». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам [math@kvantjournal.ru](mailto:math@kvantjournal.ru) и [phys@kvantjournal.ru](mailto:phys@kvantjournal.ru) соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2206 – М2211 предлагались на XXXII Турнире городов.

## Задачи М2206–М2213, Ф2213–Ф2219

**М2206.** а) Некто угнал старую полицейскую машину, максимальная скорость которой составляет 90% от максимальной скорости новой машины. В некоторый момент в участке спохватились и послали своего лучшего полицейского на поимку угонщика, дав ему новую полицейскую машину. Однако полицейский не знал, ни когда машина была угнана, ни в какую сторону вдоль бесконечной в обе стороны дороги уехал угонщик. Сможет ли полицейский догнать угонщика?

б) Решите ту же задачу, если от полицейского участка отходят бесконечные дороги в  $N$  направлениях.

Г.Гальперин

**М2207.** Квадратная доска разделена на  $n^2$  клеток  $n - 1$  горизонтальными и  $n - 1$  вертикальными прямыми. Клетки раскрашены в шахматном порядке. Известно, что на одной диагонали все клетки черные и квадратные. Докажите, что общая площадь всех черных клеток не меньше общей площади всех белых.

П.Кожевников

**М2208.** Имеется многоугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2.

Г.Гальперин

**М2209.** На кольцевом треке  $2N$  велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня любые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не

встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее  $N^2$  встреч.

Б.Френкин

**М2210.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ , причем точка  $O$  не лежит ни на одной из диагоналей этого четырехугольника. Известно, что центр описанной окружности треугольника  $AOC$  лежит на прямой  $BD$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $BOD$  лежит на прямой  $AC$ .

Ф.Ивлев

**М2211\*.** Квадрат  $ABCD$  разрезан на одинаковые прямоугольники. Покрасим все прямоугольники, которые разрезает диагональ  $AC$ . Докажите, что  $AC$  делит площадь покрашенной части квадрата пополам.

В.Произволов

**М2212.** Докажите, что для любого натурального  $a \geq 3$  существуют бесконечно много натуральных  $n$  таких что а)  $a^n - 1$  делится на  $n$ ; б\*)  $a^n - 1$  делится на  $n^2$ .

В.Сендеров

**М2213\*.** В описанном четырехугольнике  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $E$ , через  $I_a, I_b, I_c, I_d$  обозначены центры вписанных окружностей треугольников  $BCD, CDA, DAB, ABC$ . Докажите, что точка пересечения прямых  $I_a I_c$  и  $I_b I_d$  равноудалена от центров окружностей, вписанных в треугольники  $ABE, BCE, CDE, DAE$ .

Н.Белухов

**Ф2213.** После удара первого натуралиста палкой по стволу дерева пчелы вылетают из дупла, расположенного высоко – на высоте 30 м – на дереве, и разлетаются во все стороны со скоростями 1 м/с в поисках нарушителей их спокойствия. Каждую секунду наружу выбираются 1000 пчел. Второй натуралист (участ-

ник эксперимента) с очень чувствительным микрофоном расположился на соседнем дереве на расстоянии 30 м от «пчелиного» дерева на той же высоте, что и пчелиное гнездо. Он записывает жужжание, производимое пчелами. Почва под деревьями покрыта старой листвой и практически не отражает звук. Как менялась со временем громкость звука до того момента, пока «чистота» эксперимента не была нарушена воплями натуралистов?

*Ж. Фабр*

**Ф2214.** Найдите минимальную скорость движения границы полной тени Луны по поверхности Земли во время солнечного затмения. Считайте, что орбита Луны при ее движении вокруг Земли круговая и лежит в плоскости орбиты, по которой Земля движется вокруг Солнца. Расстояние от Земли до Луны примерно в 60 раз больше радиуса Земли.

*В. Славутинский*

**Ф2215.** Куб с ребром  $A$  и с равномерно распределенной по объему массой  $M$ , начальная скорость которого  $v$  направлена вдоль четырех ребер куба, движется в разреженном газе с концентрацией  $n$  молекул с массой  $m \ll M$  и температурой  $T$ . Удары молекул о гладкие стенки куба абсолютно упругие. Длина свободного пробега молекул много больше ребра куба, т.е.  $\lambda \gg A$ , а  $n \gg 1/A^3$ . Каково ускорение куба? Рассмотрите только два крайних случая: а)  $v^2 \gg kT/m$ ; б)  $v^2 \ll kT/m$ .

*А. Кубов*

**Ф2216.** Имеется гексагональная бесконечная сетка. Каждые два узла сетки характеризуются минимальным количеством «мостиков», которые нужно преодолеть, чтобы из одного узла перебраться в другой. Каждое звено такой сетки, расположенное между двумя соседними узлами, имеет сопротивление  $r$ . К каждому узлу сетки подключены три таких звена. От узла  $A$  можно вдоль проволочек (звеньев) сетки передвигаться к трем ближайшим узлам  $B$  сетки. От этих трех узлов по другим проволочкам можно перебраться к следующим по удаленности от точки  $A$  шести узлам  $C$ . Начиная с этих узлов  $C$ , симметрия перемещения по мостикам нарушается. Если батарейка подключена к двум узлам сетки, расположенным очень далеко друг от друга, то от каждого узла  $C$  токи, уходящие по двум проволочкам к следующим по удаленности от  $A$  узлам, имеют два разных значения, и их отношение неизвестно. Предположим, что отношение токов равно  $k$ . Найдите сопротивления сетки между узлом  $A$  и некоторыми узлами сетки, которые отстоят от  $A$  на 5 проволочек-мостиков.

*С. Узлов*

**Ф2217.** На длинных невесомых и нерастяжимых нитях, прикрепленных к потолку, висят три стальных сплошных шара диаметрами  $3D$ ,  $2D$  и  $D$ . В равновесном положении все нити вертикальны, центры шаров находятся на одинаковых расстояниях  $L \gg D$  от потолка и на одной горизонтальной линии, причем шары почти касаются друг друга. Посередине находится шар

диаметром  $2D$ . Шар диаметром  $3D$  отводят от положения равновесия так, что нить, к которой он прикреплен, остается выпрямленной, находится в той же плоскости, что и две другие нити, и образует с вертикалью угол  $\alpha \ll 1$ . Шар отпускают. Найдите максимальный угол  $\beta$  отклонения нити, удерживающей шар диаметром  $D$ , после первой серии ударов шаров. Считайте все удары абсолютно упругими.

*Д. Шаров*

**Ф2218.** Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента при напряжениях, не превышающих по модулю некоторой величины  $U_0$ , имеет вид  $I = \alpha U^3$ . Два диода, включенные параллельно друг другу так, что «плюс» одного соединен с «минусом» другого, имеют похожую характеристику. При подаче на такой элемент напряжения, изменяющегося по гармоническому закону  $u = U_0 \cos \omega t$ , в частотном спектре тока присутствуют первая и третья гармоники. Каково отношение их амплитуд?

*В. Поляков*

**Ф2219.** В недалеком будущем на уроке физики в школе на Луне проводится такой эксперимент. Сплошной плоский стальной лист большой площади и одинаковой по всей площади толщиной – плиту – окунают в расплавленный парафин, вынимают и ждут, когда он остынет. Плита покрывается тонкой пленкой парафина, который не смачивается водой. Плиту аккуратно опускают на поверхность воды в сосуде, и она не тонет. Какова максимальная толщина используемой в эксперименте плиты? Ускорение свободного падения на поверхности Луны равно  $1,6 \text{ м/с}^2$ . Сталь, парафин и вода на Луне такие же, как и на Земле.

*Д. Ломов*

#### Решения задач М2184–М2190, Ф2196–Ф2204

**М2184.** Про функцию  $f(x)$  известно следующее: любая прямая на координатной плоскости имеет с графиком  $y = f(x)$  столько же общих точек, сколько с параболой  $y = x^2$ . Докажите, что функция  $f(x)$  тождественно равна  $x^2$ .

Проведем касательную  $l$  к параболе в произвольной точке  $A(a, a^2)$ . Эта касательная имеет с графиком  $\Gamma$  функции  $f(x)$  ровно одну общую точку. Точки под этой касательной не могут принадлежать  $\Gamma$ , поскольку каждая из них лежит на параллельной  $l$  прямой, не имеющей общих точек с  $\Gamma$ . Точки прямой  $l$ , отличные от  $A$ , также не могут принадлежать  $\Gamma$ : каждая из них находится под какой-то другой касательной к параболе. Следовательно, точка  $A$ , а значит и любая точка параболы, принадлежит  $\Gamma$ , откуда (так как  $f(x) = x^2$ ) следует утверждение задачи.

*А. Шаповалов*

**М2185.** Дано натуральное число  $n \geq 5$ . Про пирамиду  $SA_1A_2 \dots A_n$  известно, что ее основание  $A_1A_2 \dots A_n$  – правильный  $n$ -угольник, а все боковые грани – равнобедренные треугольники (не обязательно с вершиной  $S$ ). Обязательно ли эта пирамида правильная?

**Ответ:** нет при  $n = 5$ ; да при  $n \geq 6$ .

Пусть  $n = 5$ . В плоскости  $\alpha$  возьмем правильный пятиугольник  $A_1A_2A_3A_4A_5$  и построим в плоскости, перпендикулярной  $\alpha$ , треугольник  $A_1SA_3$ , равный треугольнику  $A_1A_2A_3$ . Легко видеть, что пирамида  $SA_1A_2A_3A_4A_5$  не является правильной, но удовлетворяет условию.

Пусть теперь  $n \geq 6$ ,  $O$  – центр правильного  $n$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_n$ , а длина его стороны равна 1. Докажем, что проекция  $S'$  вершины  $S$  на основание совпадает с точкой  $O$ .

Покрасим те вершины  $A_i$ , для которых длина ребра  $SA_i$  равна 1, также покрасим все стороны  $n$ -угольника, не имеющие покрашенных концов. Ясно, что  $S'$  лежит на серединном перпендикуляре к любой покрашенной стороне.

1) Если нашлись две непараллельные покрашенные стороны, то  $S'$  лежит на пересечении серединных перпендикуляров к ним, т.е. совпадает с  $O$ .

2) Если покрашено не менее трех вершин  $A_i$ , то  $S$ , а значит и  $S'$ , равноудалена от трех вершин основания, т.е. совпадает с  $O$ .

Пусть ни одно из двух перечисленных условий не выполнено. Тогда  $n = 6$ , и в правильном шестиугольнике  $A_1A_2 \dots A_6$  покрашены две противоположные вершины. Пусть это  $A_1$  и  $A_4$ . Но это невозможно, так как  $A_1A_4 = 2$  и  $SA_1 + SA_4 = 1 + 1 = 2$ .

П. Кожевников

**M2186.** Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен  $P(x)$  с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения  $P(2)$  и  $P(P(2))$ . Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон?

**Ответ:** барон прав.

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \text{ и } P(2) = b.$$

Тогда

$$b = 2^n a_n + \dots + 2a_1 + a_0 > a_n + \dots + a_1 + a_0,$$

отсюда

$$b^n > b^{n-1} (a_n + \dots + a_1 + a_0) \geq a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0.$$

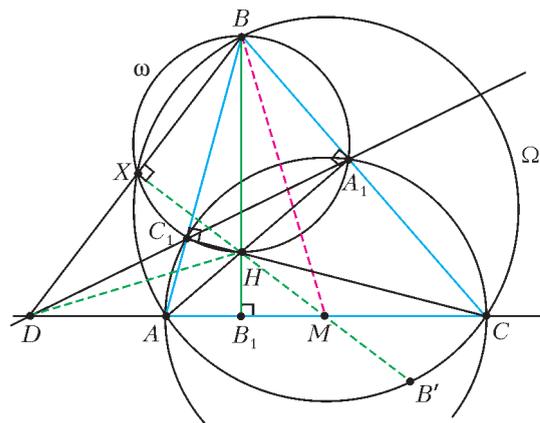
Это означает, что  $a_n$  – неполное частное, а  $a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0$  – остаток от деления  $P(P(2))$  на  $b^n$ .

Аналогично,  $a_{n-1}$  определяется как неполное частное от деления  $a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0$  на  $b^{n-1}$  и т.д.

С. Маркелов

**M2187.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ , пересекающиеся в точке  $H$ . Прямые  $A_1C_1$  и  $AC$  пересекаются в точке  $D$ . Докажите, что прямая  $DH$  перпендикулярна медиане, проведенной из вершины  $B$ .

Пусть  $BM$  – медиана треугольника  $ABC$  (см. рисунок). Докажем, что  $H$  – точка пересечения высот треугольника  $BMD$ , отсюда будет следовать утверждение задачи. Так как  $BH \perp MD$ , то достаточно доказать, что  $MH \perp BD$ .



Заметим, что точки  $A, C, A_1, C_1$  лежат на одной окружности с диаметром  $AC$ , а точки  $B, H, A_1, C_1$  лежат на одной окружности  $\omega$  с диаметром  $BH$ . Пусть  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $BD$  с описанной окружностью  $\Omega$  треугольника  $ABC$ . Тогда  $DX \cdot DB = DA \cdot DC = DA_1 \cdot DC_1$ , значит,  $X$  лежит на окружности  $\omega$ , следовательно,  $\angle BXH = 90^\circ$ , и прямая  $HX$  пересекает  $\Omega$  вторично в точке  $B'$ , диаметрально противоположной  $B$ . Тогда

$$\angle CAB' = \angle CBB' = 90^\circ - \angle CB'B = 90^\circ - \angle CAB = \angle HCA,$$

и аналогично  $\angle ACB' = \angle HAC$ . Отсюда  $AHC'B'$  – параллелограмм, и прямая  $HB'$  (перпендикулярная  $BD$ ) содержит точку  $M$ .

*Замечание.* Для решения данной задачи к точкам  $A, C, A_1, C_1$  можно применить следующий общий факт: если точки  $A, B, C, D$  лежат на одной окружности с центром  $O$  и  $P = AB \cap CD$ ,  $Q = AC \cap BD$ ,  $R = AD \cap BC$ , то точки  $O, P, Q, R$  образуют ортоцентрическую четверку (т.е. любая из них является ортоцентром для треугольника с вершинами в трех других). Этот факт нетрудно доказать с использованием полярного соответствия.

С. Ильясов, П. Кожевников

**M2188.** На плоскости лежит игла. Разрешается поворачивать иглу на  $45^\circ$  вокруг любого из ее концов. Можно ли, сделав несколько таких поворотов, добиться того, чтобы игла вернулась на исходное место, но при этом ее концы поменялись местами?

**Ответ:** нельзя.

*Первое решение.* Пусть  $A$  и  $B$  – концы иглы.

Предположим, что имеется последовательность поворотов на углы, кратные  $45^\circ$ , в результате которой конец  $B$  попадает в начальное положение конца  $A$  (можно считать, что вначале выполняется поворот вокруг  $B$ , затем вокруг  $A$ , затем вокруг  $B$  и т.д.). Пусть после первого поворота конец  $A$  попадает в точку  $A_2$ , после второго поворота конец  $B$  попадает в  $B_2$  и т.д., после очередного поворота конец  $B$  попадает в точку  $B_n = A_1$ . Мы получаем замкнутую цепочку из  $2n - 1$  (нечетного количества!) векторов  $\overline{A_1B_1}, \overline{B_1A_2}, \overline{A_2B_2}, \dots, \overline{A_nB_n}$ , имеющих равные длины. Все эти векторы параллельны одному из четырех направлений (составляющих углы, кратные  $45^\circ$  друг с другом). Покажем, что количество векторов, параллельных каждому на-

правлению, четно; тем самым, получим противоречие. Возьмем одно из этих направлений. Введем координаты, направив ось  $Ox$  параллельно этому направлению. Длину каждого вектора примем равной 2. Абсцисса каждого вектора, параллельного оси  $Ox$ , равна  $\pm 2$ ; пусть  $k$  горизонтальных векторов имеют абсциссу 2, а остальные  $l$  имеют абсциссу  $-2$ . Абсцисса вектора, не параллельного оси  $Ox$ , равна  $\pm\sqrt{2}$  или 0. Так как сумма всех векторов равна  $\vec{0}$ , то сумма их абсцисс равна 0, т.е.  $2k - 2l + m\sqrt{2} = 0$ , где  $m$  – некоторое целое число. Так как число  $\sqrt{2}$  иррационально, то  $2k - 2l = 0$ , значит, общее количество векторов, параллельных оси  $Ox$ , равно  $k + l = 2k$ .

*Второе решение.* Для пары  $P(a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2})$ , где  $a, b, c, d$  – рациональные числа, положим  $f(P) = a + 2b + c$  (отметим, что при покомпонентном сложении двух таких пар значения  $f$  складываются).

Пусть вначале конец иглы  $A$  находится в точке  $(0; 0)$  ( $f(0; 0) = 0$ ), а конец  $B$  – в точке  $(1; 0)$  ( $f(1; 0) = 1$ ).

В любой момент координаты вектора  $\overline{AB}$  могут быть равны одной из пар  $(\pm 1; 0)$ ,  $(0; \pm 1)$ ,  $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \mp \frac{\sqrt{2}}{2})$ ; в любом случае значения  $f$  для такой пары равно  $\pm 1$ . Тогда в каждый момент концы иглы  $A$

и  $B$  имеют координаты вида  $(a + b\sqrt{2}; c + d\sqrt{2})$  ( $a, b, c, d$  – рациональные числа), причем  $f(A) - f(B) = \pm 1$ . При каждом повороте иглы одно из чисел  $A$  и  $B$  остается неизменным, поэтому всегда  $f(A)$  четно, а  $f(B)$  нечетно. Значит, концы  $A$  и  $B$  поменяться местами не могут.

А.Грибалко

**M2189.** Тридцать три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

**Ответ:** могут (для любого числа  $n$  богатырей).

Пусть длина кольцевой дороги равна 1. Пусть скорости двух богатырей равны натуральным числам  $v_1$  и  $v_2$ ,  $v_1 > v_2$ . Тогда встречи этих двух богатырей будут происходить через временные интервалы величиной  $\frac{1}{v_1 - v_2}$ . Значит, если  $\frac{v_1}{v_1 - v_2}$  и  $\frac{v_2}{v_1 - v_2}$  равны целым числам, то рассматриваемые богатыри будут встречаться при обгонах только в точке старта.

Теперь для построения примера достаточно показать, что найдется набор из  $n$  различных натуральных чисел, каждое из которых делится на его разность с любым другим из этих чисел. Пример для двух чисел очевиден: 1 и 2. Для большего количества чисел пример можно конструировать по индукции: если  $u_1, \dots, u_n$  –

нужный набор из  $n$  чисел, то  $p, p + u_1, \dots, p + u_n$ , где  $p = u_1 u_2 \dots u_n$ , – искомый набор для  $n + 1$  числа.

Л.Медников, А.Шаповалов

**M2190.** Дано натуральное число. Разрешается расставить между цифрами числа плюсы произвольным образом и вычислить сумму (например, из числа 123456789 можно получить  $12345 + 6 + 789 = 13140$ ). С полученным числом снова разрешается выполнить подобную операцию, и так далее. Докажите, что из любого числа можно получить однозначное, выполнив не более 10 таких операций.

На самом деле хватит и четырех операций. Для чисел, меньших десяти тысяч, это очевидно. Иначе докажем, что после первой операции можно получить число вида  $10\dots 0abcd$ . После этого достаточно будет трижды заменить число на сумму его цифр.

Предварительно разобьем число на четырехзначные слагаемые (не начинающиеся с нуля) плюс, возможно, несколько нулей, плюс, возможно, одно меньшее число в конце (например,  $12300004500060 = 1230 + 0 + 0 + 0 + 4500 + 0 + 60$ ). Если получилось  $k$  четырехзначных слагаемых, то сумма  $S$  не меньше  $1000k$ . Будем теперь по шагам измельчать эту сумму, заменяя на каждом шаге одно ненулевое слагаемое на сумму его цифр. На каждом шаге  $S$  уменьшается, но не больше чем на 9999. Так как сумма цифр исходного числа не более  $36k + 27 < 100k$ , то наступит момент, когда после очередного шага количество разрядов в числе  $S$  уменьшится. За шаг до этого момента сумма  $S$  равнялась числу вида  $10\dots 0abcd$  – этого мы и добивались.

Л.Медников, А.Шаповалов

**Ф2196.** Катушка индуктивностью  $L = 10$  Гн соединена последовательно с конденсатором емкостью  $C = 0,1$  мкФ, и цепь подключают к батарейке. Через какое время напряжение на конденсаторе установится с точностью не хуже 1%? Элементы цепи считать идеальными, сопротивление соединяющих проводов  $R = 1$  Ом.

Установившееся значение напряжения на конденсаторе будет равно ЭДС батарейки. Если обозначить напряжение на конденсаторе  $U$ , а ЭДС батарейки  $\varepsilon$ , то, в зависимости от того, как был заряжен конденсатор до подключения к батарейке, равновесное значение может быть получено сразу или будет идти процесс постепенного приближения  $U$  к  $\varepsilon$ . Предположим, что в момент подключения на пластинах конденсатора не было зарядов. Закон Ома для замкнутой цепи, описывающий процесс в этой электрической цепи после подключения к батарейке, будет выглядеть так:

$$\varepsilon - L \frac{d^2(CU)}{dt^2} = R \frac{d(CU)}{dt} + U.$$

Слева от знака равенства записана сумма всех ЭДС, действующих в замкнутом контуре, а справа – сумма падений напряжения на резисторе и конденсаторе. Разделим правую и левую части уравнения на  $CL$  и введем новое обозначение:  $V = U - \varepsilon$ . Тогда уравнение

запишется так:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{CL} V = 0.$$

Это уравнение затухающих колебаний. Система приходит к равновесию формально за бесконечно большое время. При этом напряжение на конденсаторе может либо колебаться с затуханием, постепенно приближаясь к равновесному положению, либо это приближение будет носить аperiодический характер. Какой именно режим осуществится, зависит от соотношения между параметрами  $R$ ,  $C$ ,  $L$ . Для указанных в условии значений этих параметров реализуется режим колебаний с постепенным уменьшением амплитуды. При этом промежуток времени между последовательными прохождениями напряжения через значение  $\varepsilon$  составляет примерно  $2\pi \cdot 10^{-3}$  с. Начальная амплитуда колебаний равна  $\varepsilon$ . Амплитуда колебаний  $A$  меняется со временем по закону

$$A = \varepsilon \cdot \exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right) = \varepsilon \cdot \exp\left(-\frac{t}{20c}\right).$$

В задаче нужно найти время  $t$ , за которое амплитуда колебаний станет меньше  $\varepsilon/100$ . Отсюда получается уравнение для нахождения  $t$ :

$$\exp\left(-\frac{t}{20c}\right) = \frac{1}{100}, \text{ и } t = \ln 100 \cdot 20 \text{ с} \approx 92,1 \text{ с}.$$

Через  $t = 92,1$  с отличие напряжения на конденсаторе от ЭДС батарейки будет меньше 1%.

**Ф2197.** На плоскую стену перпендикулярно падает плоская световая волна с длиной волны  $\lambda$ . Перед стеной параллельно ей ставят непрозрачный экран с круглым отверстием. Во сколько раз освещенность в центре светового пятна на стене может быть больше, чем освещенность без экрана? Расстояние между экраном и стеной  $h$ .

Освещенность в центре светового пятна зависит от соотношения величин  $\lambda$ ,  $h$  и  $R$  – радиуса круглого отверстия в экране. При заданных  $\lambda$  и  $h$  нужно подобрать такое значение  $R$ , чтобы освещенность в центре пятна была максимальной. Воспользуемся принципом Гюйгенса–Френеля. В точку, соответствующую центру пятна, приходят и складываются волны от вторичных источников волн, расположенных по всей площади отверстия в экране. При этом амплитуды и фазы складывающихся волн зависят от положения создавших эти волны вторичных источников. Для получения максимальной освещенности в центре нужно оставить открытыми только те области, для которых расстояние до центра пятна на экране отличается от  $h$  не более чем на  $\lambda/2$ .

(Чтобы понять зависимость амплитуды колебаний в точке наблюдения – в точке стены напротив центра отверстия – от радиуса отверстия  $R$ , надо разбить открытую область экрана на тонкие концентрические кольца равной площади. Площадь должна быть одной и той же для того, чтобы амплитуды колебаний от всех

колец – вторичных источников света на фронте волны – были одинаковыми. Если расстояние от такого кольца до точки наблюдения равно  $h + l$ , то  $l$  будет увеличением длины пути по сравнению с центральной точкой экрана, а отставание по фазе будет равно  $\varphi = \frac{l}{\lambda} \cdot 2\pi$ . Из формул (рис.1)

$$(h + l)^2 = R^2 + h^2 \rightarrow 2hl + l^2 = R^2 \rightarrow 2h\Delta l = 2R\Delta R$$

следует, что одинаковым приращениям площади  $\Delta S = 2\pi R\Delta R$  соответствуют одинаковые приращения длины пути  $\Delta l$  и фазы  $\Delta\varphi$ . Это означает, что вклады в колебания от последовательных тонких колец будут складываться в окружности с постепенно уменьшающимся радиусом (рис.2.) Из геометрических соображений (см. рис.1) получаем соотношение для нужного радиуса  $R_0$  отверстия:

$$h^2 + R_0^2 = \left(h + \frac{\lambda}{2}\right)^2, \text{ или } R_0^2 = h\lambda + \frac{\lambda^2}{4}.$$

Если считать, что  $h \gg \lambda$ , то вторым слагаемым в правой части последнего равенства можно пренебречь. Тогда

$$R_0^2 = h\lambda, \text{ откуда следует, что } R_0 \ll h.$$

Если плавно увеличивать радиус отверстия до  $\infty$ , т.е. до полного отсутствия экрана, то амплитуда вектора напряженности электрического поля суммарной электромагнитной волны, созданной в центре пятна всеми вторичными источниками света, будет периодически расти и уменьшаться: от  $R = 0$  до  $R = R_0$  амплитуда растет вплоть до значения  $A$ , затем от  $R_0$  до  $R_0\sqrt{2}$  амплитуда уменьшается почти до нуля, затем снова растет почти до  $A$  при значении  $R = R_0\sqrt{3}$ , затем снова уменьшается почти до нуля при значении  $R = R_0\sqrt{4}$ . В конце концов установится значение  $A/2$ , соответствующее полностью отсутствующему экрану (точный расчет выходит за пределы школьных возможностей).

Освещенность в точке на стене пропорциональна квадрату амплитуды колебаний вектора напряженности электрического поля в этой точке. Следовательно, освещенность при наличии отверстия радиусом  $R_0$  в 4 раза больше, чем в отсутствие экрана. На рисунках 3 и 4 приведены полученные в результате численных расчетов зависимости амплитуды поля  $E/E_{\max}$  и освещенности  $I/I_{\max}$  в центре картины от величины отношения  $R/R_0$ . При этом отношение  $h/\lambda = 100$ , шаг изменения радиуса отверстия выбран  $\lambda/20$ , макси-

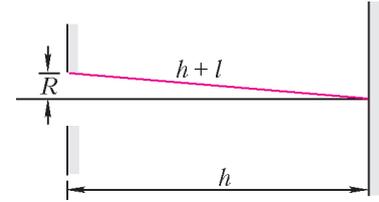


Рис. 1

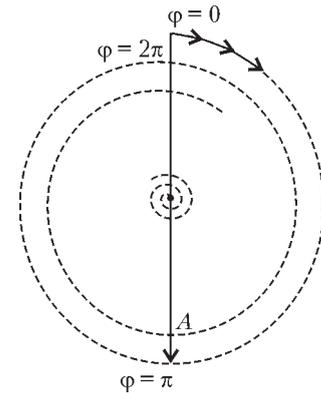


Рис. 2

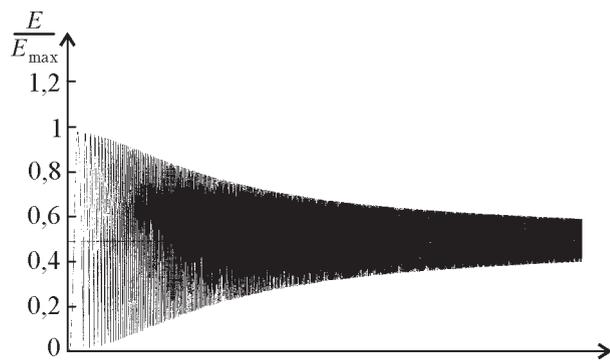


Рис. 3

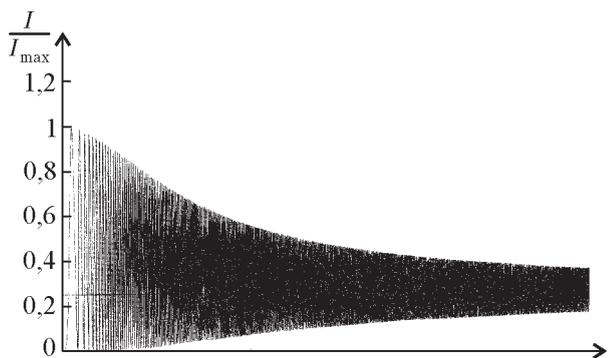


Рис. 4

мальное отношение  $R/R_0 = 50$ . Для «ориентировки» на рисунке 3 проведена линия, соответствующая половине максимальной величины амплитуды напряженности поля, а на рисунке 4 проведена линия, соответствующая значению четверти максимальной величины освещенности.

**Ф2198.** На гладком горизонтальном столе лежит плашмя тонкий обруч массой  $M$ . На обод намотана легкая нерастяжимая нить, за свободный конец нити мы тянем с силой  $F$ , направленной по касательной к обручу. С каким ускорением движется конец нити, за который мы тянем?

Обруч будет скользить по столу, при этом нить будет с него сматываться. Центр масс обруча, совпадающий с его геометрическим центром, движется с ускорением  $a = F/M$ . В неинерциальной системе отсчета, движущейся с таким же ускорением по отношению к инерциальной системе отсчета, связанной со столом, центр обруча покоится (или движется с постоянной скоростью). Чтобы и в такой неинерциальной системе отсчета пользоваться законами Ньютона, нужно ввести так называемую силу инерции  $\vec{F}_{ин} = -M\vec{a} = -\vec{F}$ , которая, как и сила тяжести, приложена к центру тяжести (к центру обруча). В этой системе отсчета сумма сил, действующих на обруч, с учетом силы инерции равна нулю, поэтому ускорение центра обруча равно нулю. На обруч действует пара сил, момент которой равен по величине  $FR$ , где  $R$  – радиус обруча. Этот момент сил заставляет обруч раскручиваться все быстрее и быстрее. Угловое ускорение  $\beta$  при таком движении равно моменту сил  $FR$ , деленному на момент инерции обруча относительно его оси вращения  $MR^2$ . При этом линейное ускорение точек на обруче и нити, которая с обруча

сматывается, равно

$$a = \beta R = \frac{FR}{MR^2} R = \frac{F}{M}.$$

По отношению к исходной системе отсчета конец нити, за который тянут обруч, участвует в двух движениях: движется вместе с неинерциальной системой отсчета с ускорением  $F/M$  и в этой системе движется с таким же ускорением  $F/M$ . В результате ускорение конца нити в инерциальной системе отсчета равно

$$a' = 2a = 2 \frac{F}{M}.$$

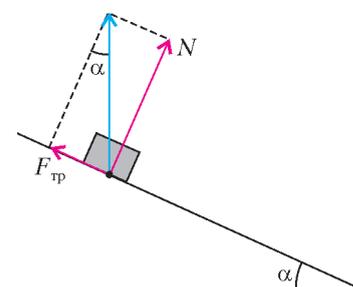
**Ф2199.** Тело, находящееся на наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, бросают горизонтально. Найдите, при каком угле  $\alpha$  траекторией тела будет периодическая кривая. Коэффициент трения тела о наклонную плоскость равен  $\mu$ .

Очевидно, что до первого удара тела о плоскость траекторией тела является кусок параболы. Требуется, чтобы траектория и дальше состояла из точно таких же кусков парабол. Это означает, что если в начальный момент тело имеет скорость  $\vec{v}_0$ , то вектор скорости тела после каждого удара тоже должен быть равен  $\vec{v}_0$ . В процессе движения горизонтальная составляющая скорости остается неизменной, а вертикальная меняется за счет действия силы тяжести. При ударе на тело дополнительно действуют две силы: сила реакции  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{тр}$ . Именно в результате действия этих сил происходит отскок от поверхности. Причем в течение всего времени удара действует сила трения скольжения, т.е. выполняется соотношение  $F_{тр} = \mu N$ . Действительно, скольжение прекращается, если обращается в ноль касательная к поверхности составляющая скорости. В этом случае скорость отскока направлена перпендикулярно к плоскости, а в нашей задаче – горизонтально. (Можно проверить, что такой случай реализуется, если угол  $\beta$  между скоростью падения и плоскостью удовлетворяет соотношению  $\text{tg } \beta > \mu$ . Как будет видно из ответа, в нашем случае  $\text{tg } \beta < \mu$ .) Следовательно, равнодействующая сил  $\vec{N}$  и  $\vec{F}_{тр}$  во все моменты взаимодействия тела с плоскостью будет иметь постоянное направление.

Для того чтобы после отскока вектор скорости был равен  $\vec{v}_0$ , нужно, чтобы силы трения и нормальной реакции изменили скорость тела, скомпенсировав результат действия силы тяжести за время полета. Для этого требуется, чтобы равнодействующая сила была направлена вертикально вверх. Из рисунка видно, что при этом  $F_{тр} = N \text{tg } \alpha$ . Но, с другой стороны,  $F_{тр} = \mu N$ , поэтому  $N \text{tg } \alpha = \mu N$ , откуда

$$\alpha = \text{arctg } \mu.$$

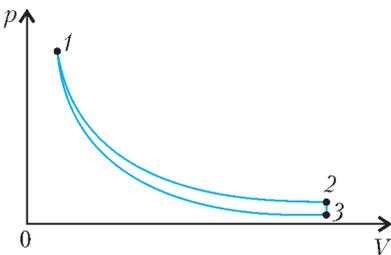
И последнее замечание.



Откуда следует, что равнодействующая сил  $\vec{N}$  и  $\vec{F}_{тр}$ , даже имея вертикальное направление, полностью и точно компенсирует действие силы тяжести за время полета? Может быть, изменение скорости  $\Delta\vec{v}$  направлено вертикально, но не равно нулю? Чтобы убедиться, что  $\Delta\vec{v} = 0$ , надо вспомнить, что перпендикулярная к плоскости составляющая скорости будет как перед ударом, так и сразу после удара (удар упругий) иметь по модулю такое же значение, как и в момент броска. Это значит, что если бы  $\Delta\vec{v}$  не равнялось нулю, то оно обязательно было бы направлено не вертикально, а по касательной к поверхности.

**Ф2200.** С порцией одноатомного газа проводят циклический процесс, состоящий из изотермического расширения в 9 раз, охлаждения в 3 раза при неизменном объеме и адиабатического сжатия до первоначального состояния (можете проверить – получается!). Найдите термодинамический КПД этого цикла.

К сожалению, проверка показала, что числа в условии подобраны неудачно и цикл при значениях коэффициентов 9 и 3 не получается. Однако можно подобрать правильные значения, при которых цикл на самом деле



получается: это 8 и 4. Изобразим на  $pV$ -диаграмме (см. рисунок) этот циклический процесс: 1-2 – изотерма, 2-3 – изохора и 3-1 – адиабата. Для КПД цикла имеем

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = 1 - \frac{Q_-}{Q_+}.$$

Найдем подведенное к газу количество теплоты  $Q_+$  и отведенное от него количество теплоты  $Q_-$ . Тепло подводится на участке 1-2 (изотерма), а отводится на участке 2-3 (изохора). Обозначим температуру на изотермическом участке через  $T$ . Тогда

$$T_2 = T \text{ и } T_3 = \frac{T}{4}.$$

Для  $\nu = 1$  моль идеального одноатомного газа

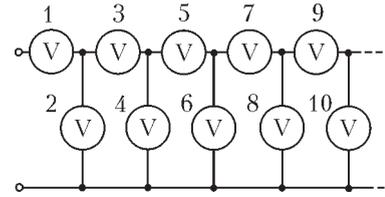
$$Q_+ = RT \ln \frac{V_1}{V_2} = RT \ln 8,$$

$$Q_- = C_V (T_2 - T_3) = \frac{3}{2} R \cdot \frac{3}{4} T = \frac{9}{8} RT,$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{9}{8 \ln 8} \approx 0,46 = 46\%.$$

**Ф2201.** Из множества одинаковых вольтметров собрана обычная «бесконечная» цепь, подключенная к батарейке. Первый из вольтметров показывает больше всех – его стрелка отклоняется почти на всю шкалу. Погрешность приборов составляет 1%. Сколько приборов показывают напряжения, превышающие порог погрешности?

Вот так выглядит обычная «бесконечная» цепь из вольтметров:



Если сопротивление одного вольтметра равно  $R$ , то сопротивление  $Z$  всей цепочки вольтметров можно найти из уравнения

$$R + \frac{RZ}{R + Z} = Z, \text{ откуда } Z = R \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Если ЭДС батарейки равна  $\mathcal{E}$ , то первый вольтметр покажет значение  $U_1 = \mathcal{E}R/Z = 2\mathcal{E}/(\sqrt{5} + 1)$ , второй вольтметр покажет  $\mathcal{E} - 2\mathcal{E}/(\sqrt{5} + 1) = \mathcal{E}(\sqrt{5} - 1)/(\sqrt{5} + 1)$ , третий покажет  $2\mathcal{E}(\sqrt{5} - 1)/(\sqrt{5} + 1)^2$ , четвертый –  $\mathcal{E}(\sqrt{5} - 1)^2/(\sqrt{5} + 1)^2$  и т.д. В результате все нечетные вольтметры – их  $n$  – показывают значения

$$U_n = U_1 \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \right)^{(n-1)/2}.$$

Все четные вольтметры – их  $k$  – показывают значения

$$U_k = U_1 \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \right)^{k/2}.$$

Чтобы нечетный вольтметр показывал значение меньше, чем погрешность прибора, его номер  $n$  должен быть таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\left( \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \right)^{(n-1)/2} < 0,01.$$

Отсюда находим  $n = 11$ . Чтобы четный вольтметр показывал значение меньше, чем погрешность прибора, нужно, чтобы

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \right)^{k/2} < 0,01.$$

Отсюда получаем  $k = 12$ .

Следовательно, всего 12 приборов показывают напряжения большие, чем их погрешность.

**Ф2202.** На рисунке 1 приведена схема включения обычного транзистора. Напряжение батарейки равно 6 В. Сопротивления резисторов в цепи базы – по 100 кОм, в цепи эмиттера – 10 кОм. Потенциал вывода базы (относительно «минуса» батарейки) +2,7 В, потенциал эмиттера +2,1 В. Во сколько раз ток коллектора транзистора больше тока базы?

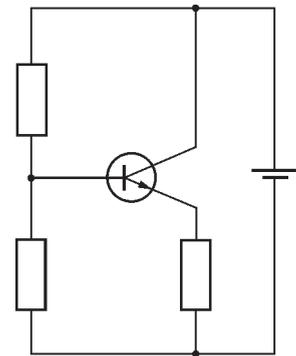


Рис. 1

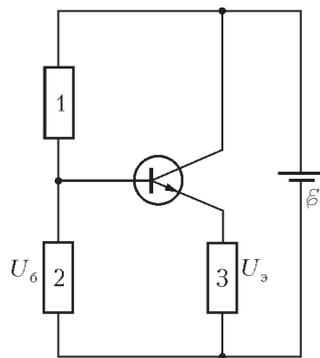


Рис. 2

Обозначим (рис.2) напряжение (ЭДС) батарейки  $\varepsilon$ , сопротивления резисторов  $R_1 = R_2 = 100 \text{ кОм} = R_6$ ,  $R_3 = 10 \text{ кОм} = R_3$ , потенциал базы  $U_6$ , потенциал эмиттера  $U_3$ . Ток эмиттера равен

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = 0,21 \text{ мА}.$$

Ток базы есть разница токов резисторов  $R_1$  и  $R_2$ :

$$I_6 = \frac{\varepsilon - 2U_6}{R_6} = 0,006 \text{ мА}.$$

Ток эмиттера складывается (согласно второму правилу Кирхгофа) из тока базы и тока коллектора, поэтому

$$I_{\text{к}} = I_3 - I_6 = \frac{U_3}{R_3} - \frac{\varepsilon - 2U_6}{R_6} = 0,204 \text{ мА}.$$

Искомое отношение токов коллектора и базы равно

$$\frac{I_{\text{к}}}{I_6} = 34.$$

**Ф2203.** Из одинаковых тонких проволочек спаяли кубик – проволочки являются его ребрами. К максимально удаленным двум вершинам кубика подключили источник, который обеспечивает протекание заданного тока во внешней цепи («источник тока»), и вычислили магнитную индукцию поля этих проволочек в центре кубика. Во сколько раз изменится это поле после перерезания одной из проволочек? При решении считайте, что токи остальных ребер после перерезания не меняются (вообще-то это неверно!).

Поле в центре кубика увеличится в бесконечное число раз. Действительно, токи всех (целых еще) проволочек кубика создавали в его центре нулевое магнитное поле. После перерезания какой-либо из проволочек поле в центре кубика не будет равно нулю. При этом оно будет максимальным, если перерезана проволочка, конец

которой соединен с одной из вершин кубика, подключенных к батарее.

**Ф2204.** Одна часть катушки индуктивности содержит 200 витков, намотанных на стержень из феррита – вещества с большой магнитной проницаемостью. В нашем случае это стержень длиной 10 см и диаметром 8 мм, магнитная проницаемость которого равна 1000 (бывает и в несколько раз больше или меньше, но так была устроена магнитная антенна моего первого радиоприемника). Длина катушки составляет 2 см. Вторая часть катушки содержит 20 витков, эта часть намотана на бумажный цилиндр, который можно передвигать по ферритовому стержню, меняя расстояние между частями катушки. Части катушки соединяют последовательно. Оцените, во сколько раз можно изменять индуктивность, передвигая по стержню «малую» катушку.

Есть два варианта последовательного подключения частей такой катушки. В первом случае токи, протекающие по виткам катушек, создают на оси стержня магнитные поля одного направления, во втором случае – поля противоположных направлений. Если две части катушки придвинуты друг к другу вплотную, то они имеют максимальный коэффициент взаимной индукции. В этой ситуации можно считать, что индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков. В первом случае  $L_1 \sim 220^2$ , во втором –  $L_2 \sim 180^2$ . Если же малая катушка удалена достаточно далеко от конца ферритового стержня, то катушки имеют малую взаимную индукцию и могут рассматриваться как независимые. Тогда общая индуктивность катушки  $L \sim (200^2 + 20^2)$ . Отношение максимального значения индуктивности к минимальному значению индуктивности получается больше для второго способа подключения катушек. Это отношение равно

$$k = \frac{200^2 + 20^2}{180^2} \approx 1,25.$$

## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВЛОМОК

### Бриллиант в оправе

(Начало см. на 2-й странице обложки)

#### Задание 1

Заблокируйте один обычный кубик шестью кубиками с магнитами на смежных гранях. При этом кубик должен быть так зажат со всех сторон, чтобы его нельзя было не только вынуть, но даже просто пошевелить, не потревожив остальные кубики. Комплект деталей для этого задания изображен на обложке на рисунке 2.

#### Задание 2

Добавьте два кубика, имеющие магниты на противоположных гранях, и попробуйте заблокировать ими два обычных кубика.

#### Задание 3

Добавьте еще один кубик и постарайтесь заблокировать три обычных кубика.

#### Задание 4

Используя все магнитные кубики, заблокируйте семь обычных кубиков (см. на обложке рис.3).

#### Задание 5

Попробуйте подобрать комбинации кубиков с магнитами, чтобы зажать 4, 5 и 6 обычных кубиков. Существуют ли разные способы сделать это?

К.Гребнев

# Задачи

1. Вдоль дорожки между домиками Незнайки и Синеглазки росли в ряд цветы: 15 пионов и 15 тюльпанов вперемешку. Отправившись из дома в гости к Незнайке, Синеглазка поливала все цветы подряд. После 10-го тюльпана вода закончилась, и 10 цветов остались неполитыми. Назавтра, отправившись из дома



в гости к Синеглазке, Незнайка собирал для нее все цветы подряд. Сорвав 6-й тюльпан, он решил, что для букета достаточно. Сколько цветов осталось расти вдоль дорожки?

*А.Шаповалов*

2. На фотографии представлена кинокамера на штативе, укрепленном на вращающейся платформе. Для поворота камеры имеется длинный рычаг. Обычно рычаг применяют для того, чтобы получить выигрыш в силе. Но платформа очень легко поворачивается на штативе. Зачем же тогда нужен рычаг?

*С.Дворянинов*

3. В справочнике «Магия для чайников» написано: «Замените в слове ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЕ одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные — на разные. Если полученное число окажется простым, случится настоящее землетрясение». Возможно ли таким образом устроить землетрясение?

*А.Сгибнев, Е.Гладкова*

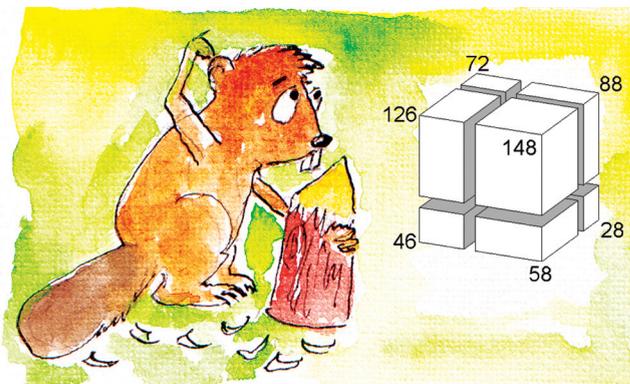
*Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.*

*Задачи 1, 3, 4 предлагались на XII Математическом празднике.*



4. Деревянный брусок тремя распилами распилили на восемь меньших брусков. На рисунке у семи брусков указана полная площадь поверхности каждого из них. Какова площадь поверхности невидимого бруска?

*А.Шаповалов*



5. Один человек по утрам нагревал себе в кружке воду для кофе. Он ставил кружку с водой в микроволновую печь и устанавливал таймер на 1 минуту 03 секунды. Однажды его приятель, увидев это, спросил — а зачем такое странное время? Проще установить таймер на 1 минуту, чем набирать еще 03 секунды, а вода будет нагреваться практически до той же температуры. Человек ответил приятелю, что есть одна важная причина, по которой ему приходится устанавливать именно такое время. Как вы думаете, что это за причина?

*Фольклор*



*Иллюстрация Д.Гришуковой*

# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

*Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvantjournal.ru (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.*

*Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.*

**16.** У продавца есть гвоздики: 30 белых, 20 розовых и 15 красных. Он продает букеты по 5 гвоздик, причем в каждом есть гвоздики всех трех цветов, но букеты могут отличаться. Какое наибольшее число букетов он сможет продать?

*А.Ковальджи*

**17.** В учебнике биологии написано, что каждый волос на голове у человека живет примерно 1500 дней, а потом выпадает. Каждый день выпадает примерно 100 волос и столько же появляется новых. Как по этим данным определить число волос на голове у человека?

*А.Ковальджи*

**18.** При каком наибольшем значении  $N$  на шахматной доске можно расставить  $N$  ладей,  $N$  слонов и  $N$  коней так, чтобы никакая фигура не была никакой другой?

*В.Рузанов*

**19.** Восемьдесят гирек массами 1 г, 2 г, ..., 80 г разложили на две чашки весов так, что весы показали

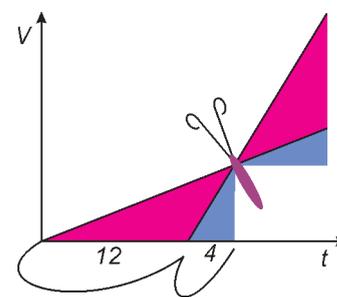
равновесие. Оказалось, что любые две гирьки с суммой масс 81 г лежат на разных чашках и любые две гирьки с разностью масс 10 г также лежат на разных чашках. Затем с чашек убрали все гирьки массой более 40 г. Докажите, что равновесие сохранится.

*В.Произволов*

**20.** Во время большой перемены кто-то из ребят разрисовал график на доске так, что получилась бабочка. А учитель посмотрел на доску и сказал:

— Смотрите, ребята, у нас появилась отличная задача: в левом крыле бабочки красного в три раза больше, чем синего. А во сколько раз в правом крыле красного больше, чем синего?

*Е.Соколов*



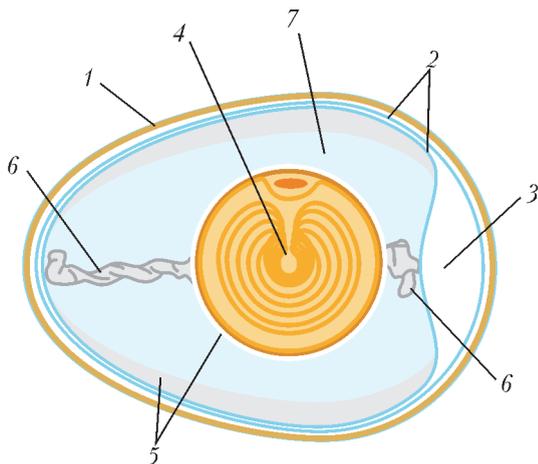
## Физика невыведенного яйца

**В.КОТОВ**

**О**БЫЧНОЕ ЯЙЦО ИМЕЕТ ОТНЮДЬ НЕ ПРОСТОЕ СТРОЕНИЕ — оно содержит все необходимое для развития живого организма. Его оболочка оберегает содержимое от механических воздействий, предохраняет от микробов, избирательно и в нужном направлении пропускает воду и газы, необходимые для дыхания зародыша, регулирует тепловой режим. Оболочка состоит из скорлупы и двух белковых подскорлупных оболочек. Сама скорлупа — это, в свою очередь, многослойная конструкция со строго определенными свойствами каждого из слоев. Предварительное напряжение, придающее скорлупе дополнительную прочность, обеспечивается натяжением тонкой эластичной пленки ее внутреннего плетеного слоя.

Скорлупа состоит, главным образом, из кальцита — кристаллов карбоната кальция. Снаружи скорлупа





Строение куриного яйца: 1 – скорлупа, 2 – подскорлупные оболочки, 3 – воздушная камера «пуга», 4 – желток, 5 – внутренний и наружный слои жидкого белка, 6 – упругие жгуты «халазы», 7 – густой белок

покрыта тонкой кожицей (кутикулой), которая образуется непосредственно перед откладыванием яйца. Верхний известковый слой состоит из тесно прижатых друг к другу столбчатых кристаллов карбоната кальция. Следующий слой образован коническими кристаллами карбоната кальция, скрепленными белковыми мостиками. Газообмен происходит через микроскопические поры между кристаллами кальцита, неплотно прилегающими друг к другу. Подскорлупные оболочки являются биологическими мембранами, обладающими избирательным пропусканием влаги и газов. А упругое удлинение оболочек (без разрыва) может достигать их линейных размеров.

**Как определить, свежее ли яйцо?** Один из рецептов ответа на этот вопрос, взятый из книги полезных советов, основан на уменьшении плотности яйца при его хранении. В 20%-м солевом растворе 1–2-дневное куриное яйцо опускается на дно, 3-дневное плавает внутри раствора, более чем 5-дневное – всплывает. Причем в последнем случае чем больше «возраст», тем меньше плотность и объем погруженной в раствор части яйца (в соответствии с законом Архимеда).

Чтобы получить более конкретную информацию, можно несколько видоизменить опыт. Если приготовить раствор с концентрацией соли, убывающей от дна к поверхности, проградуйровав его с помощью ареометра или яиц с известным сроком хранения, то яйцо в таком растворе будет плавать в том слое, плотность которого совпадает с плотностью яйца, что позволит более точно оценить его свежесть. А чтобы приготовить такой раствор, нужно поступить так. Разведите солевые растворы, начав с 40%-го, с уменьшением концентрации соли, каждый в отдельном стакане. Измерьте их плотность и подкрасьте для наглядности йодом или марганцовкой через один. На дно литровой банки или пластиковой бутылки без горлышка налейте слой раствора с максимальной плотностью. Теперь осторожно наливайте по поверхности ложки или ножа, держа их наклонно, один за другим слои раствора с плотностью, ступенчато убывающей от дна к поверхности. Заметим, что такая слоистая структура недолговеч-

на из-за диффузии, поэтому ее нужно готовить непосредственно перед опытом.

Почему же плотность яйца при хранении уменьшается и почему в нем не задыхается зародыш? Мы уже отмечали, что скорлупа и лежащие под ней две подскорлупные оболочки проницаемы для газов – через них дышит зародыш. Для его жизни важно поступление кислорода и удаление продуктов расщепления жиров желтка, из которых в результате обмена веществ образуется углекислый газ и вода. Эта вода испаряется вместе с водой, из которой на 75% состоит яйцо. В результате при хранении содержимое яйца усыхает, воздушная камера у его тупого конца увеличивается, вес яйца и его плотность уменьшаются.

**Зачем яйцу куполообразная оболочка?** Прочность любой конструкции зависит от соответствия ее формы и прочностных характеристик образующего материала. В случае известки, которая хорошо противостоит сжатию и легко разрушается при растяжении, наиболее прочными при внешних воздействиях являются конструкции сводчатой и куполообразной формы. В них под действием собственного веса и осесимметричных внешних нагрузок в меридиональном направлении возникают только сжимающие напряжения, а кольцевые меняются от сжимающих в верхней части купола до растягивающих в нижней. Следовательно, обсуждаемая форма яйца возникла не случайно, а является оптимальной и надежно ограждает содержимое яйца от внешних воздействий.

Как мы видим, природа сделала все возможное, чтобы известковая скорлупа успешно сохраняла свою целостность, служа надежной защитой зародышу. Но наступает момент, когда в защите он больше не нуждается, и оболочка должна быть легко разрушена. Птенцу, проклевывающему скорлупу изнутри, для ее разрушения нужно подействовать сравнительно небольшой силой, ибо при этом материал скорлупы подвергается растяжению под действием значительно больших по величине сил и быстро разрушается.

**Как правильно хранить яйца?** Хранить яйца длительное время рекомендуется в вертикальном положении острым концом вниз. Такое положение создает лучшие условия для сохранности желтка, в котором сконцентрированы основные питательные вещества. Действительно, сохранность желтка зависит от его удаления от стенок, через которые возможно попадание бактерий. В центре яйца также оптимальны условия для безопасного водо- и газообмена с окружающей средой. Желток, который легче белка (весь жир яйца содержится в желтке и составляет 32,6% его веса), стремится всплыть, как поплавок, и его удерживают в центре яйца упругие жгуты – халазы. Они как бы подвешивают желток в белке, но позволяют ему вращаться. При длительном хранении воздушная камера увеличивается, а напряжение закрепленного на ее стенке жгута уменьшается. В любом другом положении яйца это привело бы к нежелательному смещению желтка из центра яйца.

**Как варить яйца?** При варке прогревание белка и желтка, ведущее к сворачиванию протеинов, происхо-

дит постепенно и равномерно от периферии к центру. Жизненный опыт показывает, что для приготовления яйца «вмятку» достаточно варить его на умеренном огне около 3 минут с момента закипания воды. За это время температура внутри яйца достигает 65–73 °С. Время варки «в мешочек» — примерно 5 минут. Верхние слои белка успевают прогреться до 80–85 °С и превращаются в нежный, но сохраняющий форму студень (гель), а внутренние слои прогреваются лишь до 70–75 °С, приобретая консистенцию жидкого студня. При этом желток остается жидким. Время варки «вкрутую» — до 10 минут. Все содержимое яйца, включая желток, прогревается до 85–95 °С, превращаясь в достаточно плотный студень.

Нередко при варке яйца его скорлупа растрескивается. Образование трещин на скорлупе является следствием действия разрушающих напряжений, возникающих при неравномерном прогреве яйца. Например, в случае соприкосновения с горячей водой только части яйца (яйцо плавает на поверхности воды, посуда для варки недостаточно наполнена водой, яйцо медленно погружается в горячую воду). Чем больше разница между начальными температурами яйца и воды (яйцо вынуто из холодильника, а вода бурно кипит), тем вероятнее растрескивание скорлупы. Кроме того, быстрый нагрев ведет к резкому увеличению давления воздуха в яйце, и он, не успевая выйти через поры, разрывает скорлупу. Чтобы избежать этого, скорлупу с тупого конца предварительно прокалывают иглой. Еще один способ бережной варки яиц предусматривает предварительное завертывание их в фольгу. Фольга сглаживает возникающие неравномерности поступления тепла к яйцу и изолирует его от соприкосновения с дном посуды. В отдельных случаях разрыв скорлупы возможен в местах неравномерного теплового расширения свернувшегося белка, распирающего скорлупу изнутри.

Как поступить, если яйцо лопнуло при варке? Как не допустить вытекания белка из него в воду? Известно, что вытекание содержимого яйца можно остановить, добавив в воду соль, поскольку в соляном растворе понижается температура отвердевания белка и трещина закупоривается им. К свертыванию вытекающего белка приводит и добавление в воду уксуса, чем также нередко пользуются хозяйки.

**Вареное яйцо или сырое?** Для ответа на этот вопрос яйцо закручивают на столе вокруг поперечной оси. Вареное яйцо, представляющее собой внутри твердое сплошное тело, беспрепятственно приводится во вращение, как волчок, и может сделать на столе несколько оборотов. При этом сообщенная яйцу энергия расходуется на преодоление трения о поверхность стола. Сырое же яйцо при закручивании получит меньше энергии, ибо воздействие от пальцев передается скорлупе (1/10 массы яйца, около 4,5 г) и лишь частично — слабо связанным с ней внутренним жидким слоям. На преодоление вязкого трения между ними расходуется большая часть полученной скорлупой энергии. Кроме того, при закручивании шар желтка, составляющий 1/3 массы яйца и не закрепленный

жестко в белке, отбрасывается от оси вращения к скорлупе, что уменьшает скорость вращения яйца. В результате сырое яйцо останавливается, сделав не более 1–2 оборотов.

Если сырое яйцо трудно раскрутить, то и остановить его кратковременной внешней силой тоже нельзя. На этой особенности основан еще один способ выявления сырых и вареных яиц. Раскрученное яйцо на мгновение останавливают, придерживая пальцами, и тотчас отпускают. Вареное яйцо остается неподвижным, а сырое продолжает движение за счет не остановившихся сразу внутренних жидких слоев. (Заметим, что этот способ требует определенной сноровки.)

**Задача о колумбовом яйце.** Может ли яйцо находиться в равновесии в вертикальном положении на ровной горизонтальной поверхности?

Эта задача связана с именем Христофора Колумба. Согласно историческому анекдоту, в ответ на ироническое замечание, что открытие Америки не представляло большой трудности, Колумб предложил своему собеседнику поставить яйцо на один из его концов. Когда тот не сумел, Колумб взял яйцо, разбил его с одного конца и поставил на стол, сказав, что труда это не представляет. В связи с этим в ряде языков (русский, французский, немецкий) появилось крылатое выражение «колумбово яйцо», употребляемое в значении: неожиданный, смелый выход из затруднения или находчивое решение сложного вопроса.

Существуют и другие варианты решения задачи Колумба. Например, можно, удерживая вареное яйцо вертикально, закрутить его вокруг продольной оси. При быстром вращении оно будет некоторое время сохранять свое положение (благодаря действию закона сохранения момента импульса). Нестандартное решение этой задачи принадлежит известному популяризатору физики Я.И.Перельману. Он предложил сделать отверстия с двух противоположных концов сырого яйца, вылить содержимое и частично заполнить освободившийся объем песком. Центр тяжести яйца понизится, оно станет устойчивее, и для его опрокидывания понадобится большая сила. А можно залить в скорлупу свинец или олово и тем самым понизить центр тяжести яйца настолько, что при попытке наклонить он будет подниматься (условие устойчивого равновесия). Яйцо превратится в «ваньку-встаньку». Если же в пустую скорлупу вставить гвоздь и залить его шляпку воском, ее можно будет удерживать магнитом.

А какие решения задачи Колумба предложите вы, дорогие читатели?



*...я полагал, что и мне можно попробовать найти... для вращения небесных сфер более надежные демонстрации, чем те, которыми пользуются другие математики.*

Николай Коперник

*Взор человека слаб, кроме тех планет, которые мы видим, могут быть открыты новые, еще недоступные нашему зрению.*

Джордано Бруно

*...из небесных явлений... математически выводятся силы тяготения тел к Солнцу и отдельным планетам. Затем по этим силам... выводятся движения планет, комет, Луны и моря.*

Исаак Ньютон

*...нам предстоит особо рассмотреть возмущения планет и комет при их движении вокруг Солнца, движения Луны вокруг Земли и спутников вокруг планет.*

Пьер Симон Лаплас

*...многие с незапамятных времен смотрели на ракету как на один из способов воздухоплавания... Вот начало моих теоретических изысканий и возможности применения реактивных приборов к космическим путешествиям.*

Константин Циолковский

— Поехали!..

Юрий Гагарин

## А так ли хорошо знакома вам КОСМОНАВТИКА?

Как, неужели «Калейдоскоп» изменил себе — отошел от представления физических понятий и процессов и замахнулся сразу на несколько отраслей науки и техники, объединяемых этим емким словом КОСМОНАВТИКА?

Скажем в оправдание, что в основе космонавтики лежат естественные и точные науки, поэтому почти все ее разделы — в русле нашей тематики.

Вспомните выпуски, посвященные тяготению и орбитальному движению, невесомости и реактивной силе. Взгляните на имена ученых — математиков, физиков, астрономов, — бесспорно внесших свой вклад в фундамент космонавтики. И именно опираясь на этот фундамент, постепенно выстраивалась та «лестница в небо», на вершину которой смогли подняться инженеры, конструкторы, техники и, наконец, сами астронавты и космонавты и осуществить давнюю мечту человека, не только вырвавшись за пределы Земли, но и добравшись до нашей ближайшей соседки Луны.

А мечта эта берет свое начало во все уходящей от нас глубине веков. Оказывается, уже тысячи лет назад, говоря словами Канта, «человек отличался от свиньи тем, что иногда поднимал голову к звездам». Сегодня же остается лишь надеяться, что вновь откроются планетарии и в школу вернутся уроки астрономии. Иначе кто же тогда придет в космонавтику?!

Из россыпи связанных с космонавтикой задач и сюжетов выберем хотя бы горстку, рассчитывая, что они подпитают ваш интерес к «внеземным» вопросам, причем как раз в год полувекового юбилея первого полета человека в космос.

### Вопросы и задачи

**1.** При взвешивании тел на Земле, Луне и Марсе пружинные весы показывают один и тот же вес. Одинаковы ли массы взвешиваемых тел?

**2.** С Земли виден тонкий растущий лунный серп. Какой видят в этот момент Землю астронавты с Луны?

**3.** Некоторая планета находится на угловом расстоянии  $100^\circ$  от Солнца. Какая это планета по отношению к Земле — верхняя (внешняя) или нижняя (внутренняя)?

**4.** Как изменилась бы орбита Земли, если бы: а) масса Солнца внезапно уменьшилась вдвое; б) масса Земли вдвое возросла?

**5.** Во время полнолуний большие темные пятна на Луне видны в верхней части ее диска. Почему же на картах Луны эти пятна расположены в нижней части диска?

**6.** В какие фазы скорость Луны в гелиоцентрической системе координат будет наибольшей? А наименьшей?

**7.** Почему Луна — спутник маленькой Земли, а не огромного Солнца?

**8.** Если бы Земля вращалась с периодом 12 часов, то сколько лунных приливов наблюдалось бы в течение суток?

**9.** Могут ли на одной орбите находиться несколько космических тел?

**10.** Реально ли использовать пушку для вывода спутников на околоземную орбиту или для запуска прямо на Луну?

**11.** Могли бы существовать геостационарные спутники, если бы Земля не вращалась?

**12.** Какова трасса спутника — линия, соединяющая точки на Земле, из которых спутник виден в зените, — если радиус его орбиты равен радиусу геостационарного спутника, а плоскость орбиты образует угол  $60^\circ$  с плоскостью экватора?

**13.** Можно ли запустить спутник так, чтобы он казался неподвижным относительно звезд?

**14.** Двигатель ракеты может развивать тягу, в точности равную силе тяжести ракеты. Можно ли запустить такую ракету в космос?

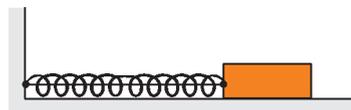
**15.** На сопло двигателя ракеты, летящей по инерции в космическом пространстве, надели изогнутую трубу выходным отверстием в сторону движения и включили двигатель. Изменилась ли скорость ракеты?

16. После отделения спутника от последней ступени ракеты-носителя она движется сначала за спутником, а затем обгоняет его. Почему?

17. В какой момент должны были ощутить невесомость герои романа Жюль Верна, отправившиеся в снаряде из пушки на Луну?

### Микроопыт

Космонавт перед полетом на Луну проводит на Земле эксперимент с бруском, показанным на рисунке. Нить



удерживает в сжатом состоянии пружину, прикрепленную к стенке и к бруску. При пережигании нити брусок

проходит до остановки путь  $l$ . Большой или меньший путь пройдет брусок, если космонавт повторит этот опыт на Луне?

### Любопытно, что...

...первые созвездия, как считают некоторые астрономы, были выделены около 16 тысячелетий назад. Найденные в последнее время мегалитические сооружения и наскальные росписи свидетельствуют о зарождении астрономических представлений у все более древних наших предков и лежит в основе нового направления науки — археоастрономии.

...относительные радиусы планетных орбит, определенные в XVI веке Коперником, отличались от современных значений не более чем на один процент. Несколько позже Тихо Браге измерил период обращения Земли с точностью до одной секунды. И это удалось сделать еще до изобретения телескопа!

...высказанная Джордано Бруно в конце XVI века мысль о множестве обитаемых миров быстро распространилась по свету и привела к рождению немало числа сочинений о космических путешествиях. Так, Кеплер в своем фантастическом рассказе о полете в космос уже предвидел опасности межпланетных полетов и невозможность известных человеку форм жизни на Луне, французский писатель Сирано де Бержерак в одном из романов предлагал для передвижения в космосе использовать солнечные батареи, магниты и пороховые ракеты, герой рассказа американца Эдгара По мечтал добраться до Луны на воздушном шаре «всего» за четыре месяца, а в начале XIX века в очередном «Путешествии на Луну» впервые был описан «космический костюм», т.е. скафандр.

...первый полет живого существа на ракете состоялся, видимо, примерно 200 лет назад, когда забавы ради французский пиротехник запустил на ней барана. Ракета достигла высоты около 200 метров, а баран живым и здоровым вернулся на землю на парашюте.

...сущность изобретения Циолковского, впервые установившего связь между скоростью ракеты, ее массой и скоростью вылетающих из нее газов, состояла в том, чтобы выбрасывание твердых тел заменить непрерывным истечением продуктов сгорания жидкого топлива.

...все космические ракеты, стартующие с поверхности Земли, запускают вертикально, хотя на заре космонавтики предполагалось, что такие запуски будут производиться с наклонных эстакад. Однако во втором случае несравнимо выросли бы потери на преодоление сопро-

тивления воздуха, да и космодром занимал бы значительно большую площадь.

...научная аппаратура, установленная в спускаемых зондах советских космических станций, посланных к Венере в 1975 году, при совершении мягкой посадки на поверхность этой планеты выдержала перегрузку порядка 300*g*.

...при старте ракеты-носителя «Сатурн-5», предназначенной для лунной экспедиции корабля «Аполлон», топливо в двигателях сжигалось с расходом 13300 килограммов в секунду(!), что позволило через 12 минут вывести на орбиту высотой 188 километров систему массой 136 тонн.

...в принципе осуществим проект по соединению тросом геостационарного спутника с земной поверхностью — так называемый космический лифт, по которому можно было бы транспортировать тела в космос без помощи ракет. Недостижимой раньше необычайно высокой прочности такого троса надеются добиться, используя новейшие нанотехнологические открытия.

...освещенный Солнцем искусственный спутник Земли радиусом 1 метр, движущийся по орбите высотой 300 километров, виден как рядовая звезда, расположенная от нас на расстоянии примерно 5 световых лет.

...массивность нашего естественного спутника — Луны — лишает Землю кольца и пылевого облака. Дело в том, что бомбардирующие Луну метеориты вызывают выброс огромных масс вещества, но, поскольку вторая космическая скорость на ее поверхности достаточно велика, оно падает на нее обратно, сохраняя околоземной космос относительно чистым.

...содружество классической астрономии и средств современной космонавтики позволило, например, обнаружить области с повышенной плотностью под поверхностью Луны, провести путем локации точные измерения расстояний до планет, выяснить, что, помимо обращения вокруг своей оси и вокруг Солнца, Земля вместе с Солнечной системой принимает участие в движении вокруг центра нашей галактики со скоростью около 250 километров в секунду практически по круговой орбите.

### Что читать в «Кванте» о космонавтике

(публикации последних лет)

1. «Булава» — 2005, №1, с.29;
2. «От пяди до Вселенной» — 2005, №5, с.29;
3. «Урбен Лавуазье» — 2006, №5, с.14;
4. «На лифте в... заоблачные дали» — 2006, №5, с.34;
5. «Вверх и вниз через атмосферу» — 2007, №1, с.9;
6. «Ян Гевелий» — 2007, №4, с.15;
7. «Радиоволны в космосе» — 2007, Приложение №1, с.176;
8. «Калейдоскоп «Кванта» — 2007, №5, с.32;
9. «Три эссе на физические темы» — 2008, №1, с.30;
10. «Полет и падение спутника Земли» — 2008, №4, с.5;
11. «Космический нанолифт» — 2009, №5, с.11;
12. «Геометрия звездного неба» — 2010, №2, с.14.

Материал подготовил А.Леоневич

# Скорость и ускорение

Е. СОКОЛОВ

ДЛЯ ОПИСАНИЯ СОСТОЯНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ТЕЛА в данный момент времени в кинематике вводятся понятия вектора скорости  $\vec{v}$  и вектора ускорения  $\vec{a}$ . А когда есть два вектора, то естественно поставить вопрос об их взаимном расположении. Например, такой: *может ли угол между скоростью и ускорением быть равным  $37^\circ$ ?*

Вопрос непростой, и в нашем классе его обсуждение превратилось в оживленную дискуссию.

Первым у нас всегда спешит с ответом Саша.

– Конечно, нет, такого быть не может! А вот угол  $90^\circ$  между скоростью и ускорением может быть (рис.1,а). Мы уже встречались с тем, что когда тело движется по окружности с постоянной по модулю скоростью, то у него есть

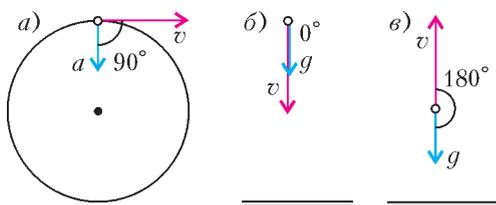


Рис. 1

ускорение. Это ускорение всегда направлено перпендикулярно скорости, т.е. к центру окружности, поэтому ему дали специальное название – центростремительное ускорение.

– И не только  $90^\circ$ , – поправила его Яна. – Помните, мы говорили, что при свободном падении ускорение тела всегда направлено вниз (рис.1,б). Поэтому угол между скоростью и ускорением может быть равен  $0^\circ$ .

– А ведь свободное падение это не только движение вниз, – вмешалась Маша. – Свободным падением можно называть любое движение тела под действием только силы тяжести, например в отсутствие сопротивления воздуха. Поэтому даже когда мяч летит вверх, его ускорение, согласно нашему правилу, по-прежнему направлено вниз (рис.1,в). Угол между скоростью и ускорением в этом случае равен  $180^\circ$ .

– Вот мы и ответили на ваш вопрос: угол между скоростью и ускорением может принимать три значения, – подытожил разговор Иван.

– Ну что же, вы нашли три возможных угла. Можете отдохнуть и полюбоваться еще одной знакомой вам картинкой (рис.2). Скажу честно – это намек. На рисунке 2 изображена траектория тела, брошенного под углом к горизонту. Такую ситуацию мы не раз обсуждали и говорили, что скорость тела в каждой точке направлена по касательной к траектории, а ускорение все время направлено вниз. Ведь куда бы ни летело тело, оно всегда свободно падает. Нарисуем для нескольких точек траектории векторы скорости и ускорения (рис.3). В

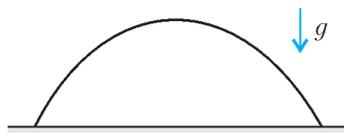


Рис. 2

верхней точке А скорость направлена горизонтально, а ускорение направлено вниз. В этой точке угол

между скоростью и ускорением равен  $90^\circ$ . Для точки В соответствующий угол острый, а для точки С – тупой. И понятно, что величины этих углов могут быть любыми.

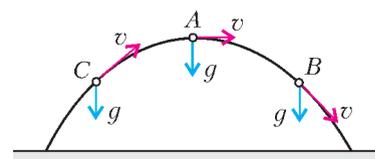


Рис. 3

Итак, вот итог наших размышлений: *угол между скоростью и ускорением может быть любым.*

Это хорошо, что мы нашли правильный ответ, но, к сожалению, жизнь наша от этого только усложнилась. Ведь если бы существовало только три угла, то достаточно было бы выбрать один вариант из трех. Но теперь мы знаем, что ускорение может быть направлено куда угодно, и вариантов стало бесконечно много. Как же быть? Как в задачах правильно рисовать, куда направлено ускорение тела? Сейчас разберемся. Но прежде сделаем общее замечание.

В процессе эволюции человек приобрел способность «видеть» скорость и траекторию. Так, мы хорошо представляем себе, куда полетит брошенный нами снежок, и легко сможем увернуться от летящего в нас снежка. Поэтому вопросы, связанные со скоростью и траекторией, обычно не вызывают сложностей. Но мы не имеем возможности «видеть» ускорение. Вот почему просто так, по наитию, не стоит пытаться его рисовать. Определить, как направлено ускорение в каждом случае, мы можем только с помощью рассуждений, применяя специальные правила. О двух таких правилах мы уже знаем: при равномерном движении тела по окружности ускорение следует направлять к центру окружности (доказывается в кинематике), а при свободном падении – вертикально вниз (доказывается в динамике).

– А есть общее правило для любого движения?

– Да, есть. И его под силу вывести любому первокурснику. Но вы еще не первокурсники, а я очень не люблю рассказывать что-то без доказательств. Давайте поступим так: превратим наше обсуждение в тест на обучаемость. Я честно, хотя и без доказательств, расскажу вам все, что нужно для построения ускорения, и даже открою вам некоторые секреты, а потом вы попытаетесь построить ускорение в десяти простых случаях.

– Согласны. Только разве сложно, зная правила, получить ответ?

– Вот это мы как раз и проверим на опыте. А пока слушайте и задавайте вопросы.

Найти направление ускорения помогают два понятия: нормальная составляющая ускорения и тангенциальная составляющая ускорения. Общее правило заключается в том, что сначала строится каждая из этих составляющих (это несложно сделать), а уже по ним – само ускорение, как показано на рисунке 4.

Нормальная составляющая ускорения – это составляющая, перпендикулярная скорости. Величину нормальной составляющей ускорения всегда можно найти по уже знакомой нам формуле

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Эта составляющая перпендикулярна скорости и направлена по радиусу  $R$  к центру кривизны траектории. Нормальная составляющая ускорения (второе, уже знакомое нам название этой составляющей

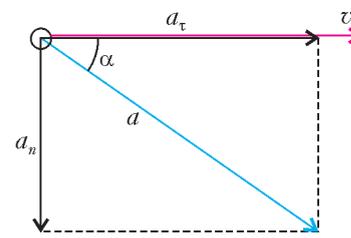


Рис. 4

– центростремительное ускорение) характеризует быстроту изменения направления скорости.

Тангенциальная, или касательная, составляющая ускорения – это составляющая, направленная параллельно скорости. Она характеризует быстроту изменения скорости по величине и определяется по формуле

$$a_{\tau} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Направлять тангенциальную составляющую следует либо по направлению скорости, либо против – в зависимости от того, увеличивается скорость или уменьшается.

Определив обе эти составляющие, мы можем с помощью рисунка 4 восстановить само ускорение (иногда говорят «полное ускорение»). При необходимости модуль ускорения и угол между скоростью и ускорением можно вычислить с помощью теоремы Пифагора и понятия арктангенса:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_{\tau}^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{a_n}{a_{\tau}}.$$

Ну как, понятно?

– Да, вроде все ясно. Сначала рисуем нормальную составляющую ускорения перпендикулярно скорости в направлении к центру кривизны – так же, как мы рисовали центростремительное ускорение. Потом строим вторую составляющую – вдоль или против скорости. И после этого по рисунку 4 находим само ускорение.

– Все правильно. Но прежде чем переходить к тесту, я хочу обратить ваше внимание на очень важные частные случаи. Выполните, пожалуйста, такое упражнение: а) укажите два случая движения тела, в которых нормальная составляющая ускорения обращается в ноль; б) укажите два случая движения тела, в которых тангенциальная составляющая ускорения обращается в ноль. Лучше будет, если вы сами ответите на эти вопросы, но ничего страшного не произойдет, если вы просто прочтете следующие два абзаца.

а) Нормальная составляющая ускорения обращается в ноль тогда, когда обращается в ноль выражение  $a_n = v^2/R$ . А это может произойти в двух случаях. Первый случай видят все: нормальная составляющая обращается в ноль, если скорость обращается в ноль.<sup>1</sup> Поэтому нормальная составляющая ускорения всегда равна нулю в точках остановки тела.

Второй случай увидит лишь тот, кто знает, что общего у прямой, окружности и точки. Оказывается, и точка, и прямая есть частные случаи окружности (рис.5). Точка – это окружность с радиусом, равным нулю, а прямая – это окружность с радиусом, равным бесконечности. Не верите? Попробуйте нарисовать на компьютере окружность очень большого радиуса. Она практически не будет отличаться от прямой линии. Итак, второй случай, когда нормальная составляющая обращается в ноль, – это случай, когда  $R = \infty$ , т.е. когда тело движется по прямой. При прямолинейном движении нормальной составляющей ускорения нет.

б) Тангенциальная составляющая ускорения обращается в ноль тогда, когда обращается в ноль выражение

<sup>1</sup> Для знатоков уточним, что полностью эта фраза должна звучать так: «когда скорость обращается в ноль, а радиус кривизны не равен нулю, т.е. точка остановки не является точкой излома траектории».

$a_{\tau} = \Delta v/\Delta t = v'(t)$ . А это тоже может произойти в двух случаях. Первый случай – это равномерное движение, когда модуль скорости вообще не изменяется. Второй случай – это моменты времени, когда модуль скорости достигает максимума или минимума и производная от модуля скорости по времени становится равной нулю.

Наш рассказ о кинематическом методе построения ускорения закончен. Теперь попробуйте выполнить приведенный ниже тест. В нем собраны, пожалуй, все возможные случаи построения ускорения. Отметим, что этот тест не так прост, как кажется.

**Тест.** Для каждого из десяти положений тела, изображенных на рисунке 6, определите, как направлено его ускорение.

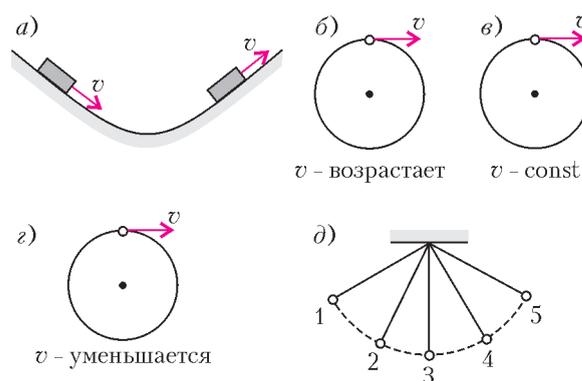


Рис. 6

а) Санки скатываются с горки, а затем заезжают на горку.

б) Тело движется по окружности с возрастающей скоростью.

в) Тело движется по окружности с постоянной скоростью.

г) Тело движется по окружности с уменьшающейся скоростью.

д) Математический маятник совершает колебания. Точки 1 и 5 – крайние точки, 2 и 4 – промежуточные, 3 – самая нижняя точка.

В заключение – одно полезное замечание. Наш разговор о направлении ускорения мы вели на языке кинематики. Однако говорить об этом можно и на языке динамики. Иногда (но не всегда) динамические рассуждения могут оказаться проще кинематических. Например, с помощью динамики очень легко ответить на исходный вопрос об угле  $37^\circ$ . Динамика учит, что ускорение порождается силой. Согласно второму закону Ньютона,  $\vec{a} = \vec{F}/m$ , т.е. куда направлена сила, туда направлено и ускорение. Силу мы можем прикладывать в любом направлении по нашему желанию, поэтому и ускорение, создаваемое этой силой, может иметь любое направление.

# Электростатика СО ЛЬДОМ

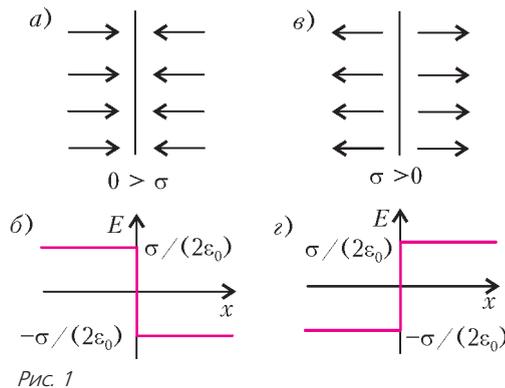
**А. СТАСЕНКО**

«ЕСЛИ БЫ В ВАШЕМ ТЕЛЕ ИЛИ В ТЕЛЕ ВАШЕГО СОСЕДА (стоящего от вас на расстоянии вытянутой руки) электронов оказалось бы всего на 1% больше, чем протонов, то... силы отталкивания хватило бы, чтобы поднять «вес», равный весу нашей Земли!» («Фейнмановские лекции по физике»). А возможно ли такое?

И тут Отличник вспомнил недавние «ледяные дожди», изломавшие тысячи деревьев в России и порвавшие километры электропроводов. Он знал также о том, что в одной только Америке в результате обледенения небольших самолетов ежегодно погибают десятки человек, а материальный ущерб составляет почти миллиард долларов. И ему пришла в голову светлая мысль: если холодные облачные капли, ударяющиеся о поверхность самолета, электрически заряжены, то, образуя ледяную корку (что очень плохо), они могли бы одновременно и разрушать ее (что было бы хорошо). И Отличник начал рассуждать.

Представим себе тонкую диэлектрическую пленку площадью  $S$ , на которой равномерно «размазан» электрический заряд  $q$ , так что поверхностная плотность заряда равна  $\sigma = q/S$ . Будем считать, например, что этот заряд отрицательный: кто-то «напылил» электроны на поверхность пленки. Тогда напряженность электрического поля будет направлена так, как изображено на рисунке 1,а, а значение поля  $E = \pm\sigma/(2\epsilon_0)$  представлено на графике на рисунке 1,б. Видно, что все векторы  $\vec{E}$  направлены нормально к пленке, а величина  $E$  при пересечении пленки в направлении оси  $x$  претерпевает скачок, направленный вниз и равный  $-\sigma/\epsilon_0$ .

Как тут не вспомнить плоский конденсатор! Действительно, если мы поднесем к нашей отрицательно заряженной пленке такую же, но положительно заряженную пленку с такой же по модулю поверхностной плотностью заряда (рис.1,в,г), то поле между этими плоскостями ( $-h/2 < x < h/2$ ) удвоится:  $E = \sigma/\epsilon_0$ , а снаружи исчезнет. Далее, на



каждую из этих двух плоскостей, несущих заряды  $\pm\sigma S$  и находящихся в поле другой плоскости с напряженностью  $\pm\sigma/(2\epsilon_0)$ , действует сила притяжения величиной  $F = \sigma S \cdot \sigma/(2\epsilon_0)$ , которую можно трактовать и как внешнее

давление:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \tag{1}$$

С другой стороны, эту величину можно рассматривать и как объемную плотность энергии электрического поля – достаточно убедиться в том, что эти физические понятия имеют одну и ту же размерность:  $[F]/[S] = \text{Н}/\text{м}^2 = \text{Дж}/\text{м}^3$ .

Уместно вспомнить, что понятие поля и его физических атрибутов ввел Майкл Фарадей в первой половине девятнадцатого века. Идея поля считается самым важным открытием со времен Ньютона. «Надо иметь могучий дар научного предвидения, – писал А. Эйнштейн, – чтобы распознать, что в описании электрических явлений не заряды и не частицы описывают суть явлений, а скорее пространство между зарядами и частицами».

Но вернемся к нашей равномерно заряженной пленке. Представим теперь (рис.2), что пленка вовсе не бесконечно тонкая (да такую и нигде достать), а имеет толщину  $h$ , а тот же самый заряд  $q$  «размазан» равномерно уже по ее объему  $Sh$  так, что объемная плотность заряда стала равной  $\delta = q/(Sh) = \sigma/h$ . По-нятно, что вне этой «тонкой пленки», которую можно теперь назвать слоем толщиной  $h$ , направление и величина электрического поля не изменяется (см. также рис.1,б). А внутри? Разумно предположить, что поле внутри слоя будет изменяться непрерывно между его значениями на поверхности слоя, причем линейно – ну хотя бы потому, что в средней плоскости ( $x = 0$ ) значение напряженности должно обратиться в ноль (по соображениям симметрии).

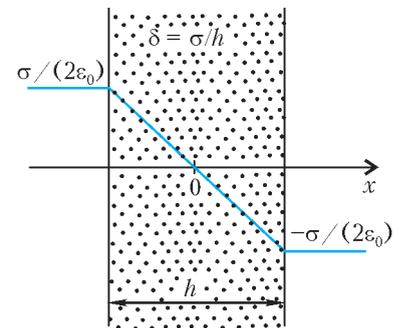


Рис. 2

Поднесем теперь (рис.3,а) к этому слою справа металлический цилиндр с плоским торцом, и пусть радиус этого

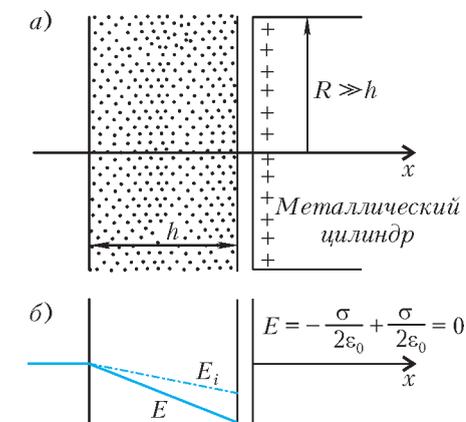


Рис. 3

цилиндра много больше толщины слоя, так что поверхность этого цилиндра «бесконечно далеко» от рассматриваемой картины с характерным размером  $h$ , помещающейся на наших рисунках. Да, но ведь внутри металла электрическое поле равно нулю (иначе в металле побегал бы электрический ток). А это означает, что на поверхности торца должен возникнуть распределенный положительный заряд с плот-

ностью, в точности равной  $\sigma$  (по модулю). Электрическое поле от этого распределенного заряда аналогично первоначальному (см. рис.2), только противоположно по знаку (оно отдельно изображено на рис.1,*в,з*), так что вне слоя суммарная напряженность поля станет равной нулю (рис.3,*б*).

Но при чем тут лед, обещанный выше? А при том, что пора учесть, что наши первоначальные заряды с объемной плотностью  $\delta = \sigma/h$  должны быть заморожены в диэлектрик, т.е. в среду, не обладающую свойством электропроводности, – а ведь мы до сих пор считали, что они «развешены» кем-то в вакууме. Но если слой обладает диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , то напряженность электрического поля  $E_i$  в нем должна быть уменьшена в  $\epsilon$  раз (см. рис.3,*б*, пунктир):  $E_i = E/\epsilon$  (тут индекс  $i$  происходит, если хотите, от *inner* – внутреннее или, если хотите, от *ice* – лед). Видно, что наибольшее значение этого поля равно

$$E_{\max} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\delta h}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (2)$$

Какую пользу можно извлечь из наших рассуждений? А вот какую: можно оценить внутренние силы, действующие в слое льда. Действительно, если полю в вакууме между двумя заряженными плоскостями мы приписали свойство оказывать давление, то почему бы и в случае с заряженным диэлектриком не приписать полю то же свойство? Только теперь в формулу (1), казалось бы, разумно добавить множитель  $(\epsilon - 1)$  – ведь при  $\epsilon \rightarrow 1$  исчезает сам диэлектрик. Однако тут дело сложнее. Хотя при  $\epsilon \rightarrow 1$  диэлектрик и превращается в вакуум, напряжение не может исчезнуть: ведь кто-то должен удерживать вместе заряды одного знака. Более точная теория говорит о том, что нужно ввести множитель  $2\epsilon - 1$  (впрочем, это не повлияет на порядок величины искомой оценки).

Строго говоря, силы внутри заряженного диэлектрика различны в разных направлениях. В широко известном учебнике И.Е.Тамма «Основы теории электричества», выдержавшем порядка десятка изданий и сыгравшем большую роль в подготовке отечественных физиков в последние пятьдесят лет, об этом сказано весьма образно: «можно представить себе, что вдоль силовых линий поля натянуты упругие нити, подверженные натяжению... и оказывающие друг на друга боковое давление».

Итак, для наших оценок примем, что наибольшее механическое напряжение внутри равномерно заряженного диэлектрика равно  $E_{\max}^2 \epsilon_0 (2\epsilon - 1)/2$ , или, используя формулу (2),

$$p_{\max} = \frac{\delta^2 (2\epsilon - 1) h^2}{2\epsilon_0 \epsilon^2}. \quad (3)$$

Пусть теперь рисунок 3,*а* изображает слой льда, налиший на поверхность какого-либо элемента конструкции самолета (например, переднюю кромку крыла), и пусть в переохлажденном облаке, в котором движется самолет, распределены метастабильные (готовые замерзнуть) капли с концентрацией  $n$  и радиусом  $a$ . Тогда массовая плотность капель в облаке равна

$$\rho_{\infty} = n \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0,$$

где  $\rho_0$  – плотность воды. Далее, допустим (для численной оценки сверху), что каждая капля несет максимально возможный заряд, определенный предельным значением напряженности электрического поля  $E_*$  на ее поверхности, выше которого в воздухе начнется стекание заряда с поверхности капли. Тогда, согласно закону Кулона, этот заряд равен

$$Q = E_* \cdot 4\pi a^2 \epsilon_0.$$

При образовании наледи произойдет уплотнение в  $\rho_i/\rho_{\infty}$  раз, где  $\rho_i$  – массовая плотность льда. Поэтому объемная плотность заряда станет равной

$$\delta = nQ \frac{\rho_i}{\rho_{\infty}} = \frac{\rho_{\infty}}{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0} E_* \cdot 4\pi a^2 \epsilon_0 \frac{\rho_i}{\rho_{\infty}} = \frac{3\rho_i \epsilon_0 E_*}{\rho_0 a}.$$

(Любопытно отметить, что результат оказался не зависящим от «водности» облака  $\rho_{\infty}$ , что, впрочем, вполне понятно. Объемная плотность заряда в наледи такая же, как в каждой капле, с поправкой на отличие плотности льда от плотности воды.) Подставляя все это в выражение (3), получим

$$p_{\max} = \left( \frac{3\rho_i \epsilon_0 E_*}{\rho_0 a} \right)^2 \frac{(2\epsilon - 1) h^2}{2\epsilon_0 \epsilon^2} = \frac{9}{2} \left( \frac{\rho_i E_*}{\rho_0 a} \right)^2 \frac{(2\epsilon - 1) \epsilon_0 h^2}{\epsilon^2}.$$

Осталось только сделать численную оценку. Примем  $\rho_i = 900 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $E_* = 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$ ,  $a = 10 \text{ мкм} = 10^{-5} \text{ м}$ ,  $\epsilon = 100$ ,  $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ Ф/м}$ ,  $h = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$ , тогда

$$p_{\max} = \frac{9}{2} \cdot \frac{9 \cdot 10^{12}}{10^{-10}} \frac{2 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10^2} \text{ Па} = \frac{9}{4\pi} 10^7 \text{ Па}.$$

Это значение вполне сравнимо с измеренными в лабораторных условиях пределами прочности льда. Вот только летать в таких облаках не рекомендуется.

Конечно, рассмотренная геометрия мало похожа на переднюю кромку крыла. В следующем приближении можно было бы рассмотреть цилиндр, учесть, что линии тока воздуха и траектории капель изгибаются перед ним (это связано с известной теоремой Н.Е.Жуковского), и решить численно более сложную задачу.

Но тут другая мысль пришла в голову Отличника: поскольку лед и вода (даже дистиллированная) обладают электропроводностью, заряд может стекать из наледи в проводник! Вернемся к конденсатору, заполненному веществом с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и удельной проводимостью (величиной, обратной удельному сопротивлению)  $\lambda$ . Ясно, что, чем больше  $\epsilon$ , тем больший заряд можно накопить на пластинах (ведь емкость конденсатора пропорциональна  $\epsilon\epsilon_0$ ), а чем больше  $\lambda$ , тем скорее конденсатор разрядится. Отсюда очевидно, что характерное время разрядки равно  $\tau = \epsilon\epsilon_0/\lambda$  (проверьте размерность!). Принимая  $\epsilon = 100$ ,  $\lambda = 10^{-6} \text{ 1/(Ом} \cdot \text{м)}$ , получим  $\tau = 10^{-3} \text{ с}$ . Значит, заряд почти мгновенно будет уходить из наледи. Да, но при этом должно выделяться джоулево тепло...

Э, брат, – подумал Отличник, – чтобы во всем этом разобраться, нужно поступить на факультет аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института и с успехом его закончить.

Чего вам и желаем!

# Оптика колбы

**В. ДРОЗДОВ**

СТЕКЛЯННЫЕ КОЛБЫ ШИРОКО ПРИМЕНЯЮТСЯ В ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТАХ – например, по термодинамике. Однако интересно использовать колбу и как оптический прибор.

Попытаемся «поймать» в фокус солнечные лучи пустой колбой. Ничего не получится – колба действует как рассеивающая линза. Теперь наполним колбу водой – она уже работает как собирающая линза и позволяет сфокусировать солнечные лучи. Попробуем объяснить результаты этих опытов.

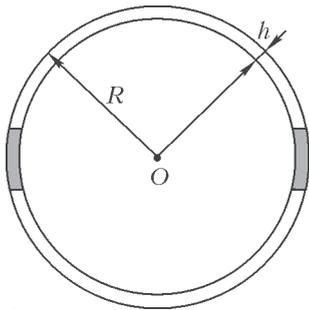


Рис. 1

Колба, с которой проводился наш эксперимент, в основной своей части имеет форму сферы с внешним радиусом  $R = 50$  мм и толщиной стенок  $h = 1$  мм. Примем, что показатель преломления стекла равен  $n_c = 1,5$ .

Пустая колба представляет собой оптическую систему, состоящую из двух тонких линз, разделенных расстоянием  $2R$  (рис.1). Оптическая сила каждой линзы равна

$$D = (n_c - 1) \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R-h} \right) = -(n_c - 1) \frac{h}{R(R-h)}.$$

Так как  $h \ll R$ , то правомерно считать, что

$$D = -\frac{(n_c - 1)h}{R^2}.$$

Соответственно, модуль фокусного расстояния одной линзы равен

$$|F| = \frac{R^2}{(n_c - 1)h}.$$

Легко видеть, что  $|F| \gg 2R$ . Поэтому, в первом приближении, можно суммировать оптические силы двух линз, как будто они расположены вплотную. Тогда оптическая сила  $D_k$  колбы, т.е. системы двух тонких линз, будет равна

$$D_k = 2D = -\frac{2(n_c - 1)h}{R^2}. \quad (1)$$

Теперь понятно, почему пустая колба рассеивает световые лучи:  $D_k < 0$ .

Следующим шагом вычислим оптическую силу  $D_{ш}$  водяного шара радиусом  $R$  (на самом деле, радиусом  $R - h$ , но  $h \ll R$ ). Рассмотрим луч, идущий вблизи одной из главных оптических осей шара параллельно ей (рис.2). Место пересечения вышедшего из шара луча и оси – точка  $C$  – и есть фокус шара. Параксиальность лучей гарантирует нам, что углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  будут малыми, т.е. значительно меньшими одного радиана. По закону преломления света в точках  $A$  и  $B$  имеем соответственно

$$\sin \alpha = n_b \sin \beta, \quad n_b \sin \beta = \sin \gamma,$$

где  $n_b = 4/3$  – показатель преломления воды. Отсюда получаем

$$\gamma = \alpha.$$

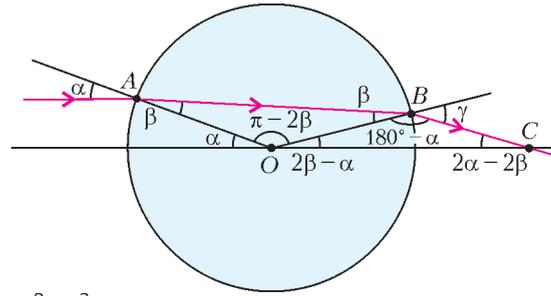


Рис. 2

Применим к треугольнику  $OBC$  теорему синусов:

$$\frac{OC}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{R}{\sin(2\alpha - 2\beta)}$$

и найдем фокусное расстояние шара:

$$F_{ш} = OC = \frac{R \sin \alpha}{\sin(2\alpha - 2\beta)}.$$

Так как синус малого (в радианной мере) угла можно заменить самим углом, окончательно получим

$$F_{ш} = \frac{R\alpha}{2(\alpha - \beta)} = \frac{Rn_b\beta}{2(n_b\beta - \beta)} = \frac{Rn_b}{2(n_b - 1)}.$$

Факт отсутствия в этой формуле угла  $\beta$  говорит о том, что все параксиальные лучи собираются в одной точке  $C$ , т.е. мы нашли действительно фокус. Соответственно, оптическая сила водяного шара будет равна

$$D_{ш} = \frac{2(n_b - 1)}{Rn_b}. \quad (2)$$

Вернемся теперь к нашей колбе. Наполненная водой колба является весьма непростой для расчета оптической системой, последовательно состоящей из тонкой рассеивающей линзы, толстой собирающей линзы (шара) и второй тонкой рассеивающей линзы. Однако громоздких выкладок можно избежать. И вот как.

Из формул (1) и (2) найдем отношение модуля оптической силы пустой колбы и оптической силы водяного шара:

$$\frac{|D_k|}{D_{ш}} = \frac{n_b(n_c - 1)h}{n_b - 1} \frac{1}{R}.$$

Для нашей экспериментальной колбы числовой расчет дает

$$\frac{|D_k|}{D_{ш}} = 0,04, \text{ т.е. } |D_k| \ll D_{ш}.$$

Так что действительно не стоит удивляться тому, что оптически «положительный» водяной шар доминирует над оптически «отрицательной» стеклянной оболочкой, в которую он заключен, и наполненная водой колба фокусирует солнечные лучи, действуя как собирающая линза.

# Кольца Кетле

А.АНДРЕЕВ, А.ПАНОВ

«ОПТИКА» НЬЮТОНА, ИЗДАННАЯ В 1704 ГОДУ, НА ЦЕЛОЕ столетие, вплоть до появления волновой теории света, определила развитие оптической науки. Многие описанные и проанализированные там эксперименты стали хрестоматийными и входят в школьные учебники. К ним относятся, например, и знаменитые опыты по разложению белого света в спектр с помощью призмы, и открытие так называемых колец Ньютона, возникающих в результате интерференции света в тонкой воздушной прослойке между поверхностью стеклянной пластинки и плосковыпуклой линзой, прижатой к пластинке выпуклой стороной.

Мы начнем с другого, может быть менее известного, явления, которое сам Ньютон называл «цветами толстых пластинок»<sup>1</sup>. А сейчас его часто связывают с именем бельгийского ученого Адольфа Кетле и называют, соответственно, «кольцами Кетле».

**Запыленное зеркало.** В своей книге Ньютон рассказывает, как, направив узкий пучок солнечных лучей на сферическое зеркало, после отражения увидел на экране целую систему цветных колец, и детально описывает серию последовавших экспериментов. Ньютон полагает, что это явление возникает из-за рассеяния света на неоднородностях внешней поверхности зеркала и из-за отражения от внутренней поверхности самого зеркала. Первое последовательное объяснение этого эффекта было дано Томасом Юнгом в 1802 году.

На самом деле, в экспериментах Ньютона рассеяние происходило на частицах обычной бытовой пыли, осевших на поверхности зеркала. Чтобы убедиться в этом, достаточно в темное время посветить на запыленное зеркало с расстояния в несколько метров маленьким светодиодным фонариком, расположенным вблизи глаза. Вы увидите те же самые цветные полосы, что наблюдал Ньютон в своих опытах. Если очистить поверхность зеркала от пыли, полосы исчезают.

Есть еще один надежный способ зарегистрировать полосы Кетле – воспользоваться фотоаппаратом со вспышкой. Здесь тоже яркий источник-вспышка и наблюдатель-объектив разнесены на небольшое расстояние, что позволяет уверенно фиксировать цветные полосы, локализованные на поверхности зеркала.

Полосы Кетле – это легко воспроизводимое явление. Если у вас нет под рукой естественно запыленного зеркала, вы можете запылить чистое зеркало любым мелкодисперсным порошком – содой, мукой, пудрой и т.п. или забрызгать водой. В каждом из этих случаев вы сможете наблюдать красивые яркие полосы (рис.1).

**Компьютерная «пыль».** Оказывается, можно не возиться с пылью и водой, а поставить еще более «чистый» эксперимент – использовать искусственную пыль. На компьютере с помощью датчика случайных чисел создайте рисунок, состоящий из случайно расположенных точек, – так называемый стохастический растр (рис.2). Распечатайте его на прозрачной пленке, приклейте пленку к зеркалу и сфотографируйте со вспышкой. В результате вы получите картину, очень похожую на изображенную на рисунке 1.

<sup>1</sup> Именно так называется статья Я.Амстиславского, опубликованная в Кванте №6 за 1989 год.



Рис.1. Зеркало, забрызганное спреем, и полосы Кетле

Позже мы еще вернемся к этим экспериментам с пленкой.

**Томас Юнг и интерференция.** Можно сказать, что Юнг заново прочел ньютоновскую «Оптику». Используя созданную им самим интерференционную теорию, Юнг дал последовательное объяснение многим явлениям, описанным в этой книге, чего не мог сделать Ньютон, не владевший сколько-нибудь удовлетворительной волновой теорией света. Это касается и колец Кетле.

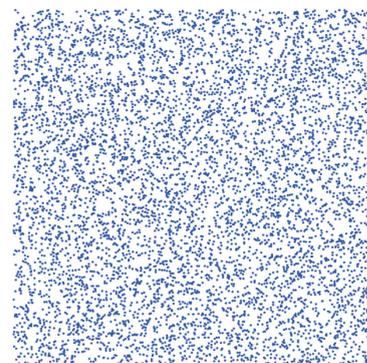


Рис.2. Стохастический растр

Юнг рассмотрел два альтернативных пути взаимодействия световых лучей с частицей, находящейся на поверхности зеркала (рис.3). В первом случае световой луч сначала отражается от зеркала, а потом диффузно рассеивается на частице. Слова «диффузно рассеивается» означают, что после взаимодействия света с частицей возникает целый пучок разнонаправленных лучей. Во втором случае световой луч сначала диффузно рассеивается на частице и только потом отражается от зеркала.

Будем считать, что на зеркало толщиной  $t$  падает пучок параллельных лучей, угол падения обозначим  $i$ . Рассмотрим два параллельных «рассеянно-отраженных» луча с углом рассеяния  $\theta$  (см. рис.3). По Юнгу, эти лучи могут интерферировать, т.е. в направлении  $\theta$  свет может усиливаться или ослабляться – все зависит от соотношения разности хода лучей  $\Delta L(\theta)$  и длины волны  $\lambda$  падающего света. Чтобы найти разность хода, надо провести общие перпендикуляры к обоим падающим и к обоим рассеянным лучам и посчитать разность длин лучей между осно-

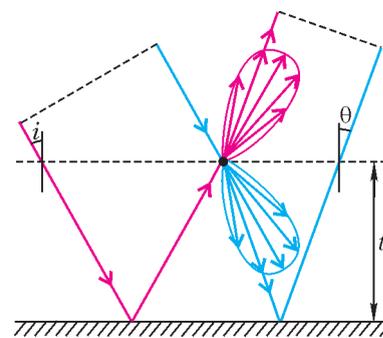


Рис.3. Два пути взаимодействия светового луча с частицей

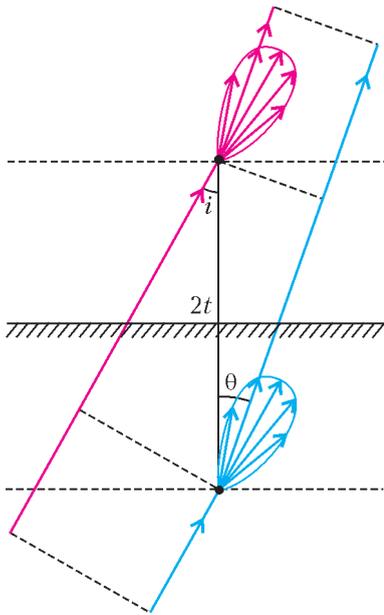


Рис.4. «Выпрямление» световых лучей

Чтобы вычислить разность хода выбранных параллельных лучей, используем следующий искусственный прием. «Выпрямим» все световые лучи, т.е. геометрически отразим относительно зеркала все отрезки лучей еще не испытавших физического отражения в зеркале. Заодно отразим внешнюю поверхность зеркала и частицу, на которой происходит рассеяние. В результате вместо рисунка 3 получим рисунок 4. И здесь уже разность хода вычисляется элементарно как разность катетов двух прямоугольных треугольников с гипотенузой  $2t$ :

$$\Delta L(\theta) = 2t(\cos i - \cos \theta).$$

А условие того, что в направлении  $\theta$  будет наблюдаться интерференционный максимум, приобретает вид

$$2t(\cos i - \cos \theta) = n\lambda.$$

Отметим, что мы не будем дальше использовать эти формулы – мы только хотели показать принципиальную возможность простого расчета интерференционной картины. При этом не было учтено преломление света при переходе из воздуха в стекло и при обратном переходе – из стекла в воздух. Можно считать, что это было сделано для упрощения расчета. Но, с другой стороны, в природе действительно существуют зеркала, внутри которых никакого преломления не происходит. Впрочем, мы еще обсудим, как физически можно реализовать «выпрямление» световых лучей, изображенное на рисунке 4.

**Анимация.** Если запыленное зеркало освещается маленьким фонариком, то здесь речь идет скорее о точечном источнике, а не о пучке параллельных лучей. А тогда наблюдаемая картина сильно зависит от взаимного расположения источни-

вания этих перпендикуляров. Если в разности хода укладывается целое число длин волн, т.е. если  $\Delta L(\theta) = n\lambda$ , то в направлении  $\theta$  свет будет усиливаться, если же  $\Delta L(\theta) = (n + 1/2)\lambda$ , то свет будет ослабляться. Таким образом возникает интерференционная картина.

Для создания ярких колец Кеттле, конечно, недостаточно одной рассеивающей частицы. Необходим целый ансамбль таких частиц, указанным образом взаимодействующих с падающим светом и достаточно плотно покрывающих поверхность зеркала.

ка и наблюдателя. На рисунке 5 изображена серия рассчитанных интерференционных картин в случае, когда источник и наблюдатель находятся близко друг от друга в плоскости, перпендикулярной зеркалу, на расстоянии 5 м от него. В этой плоскости источник делает четверть оборота вокруг наблюдателя, длина волны света равна  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$  м. На рисунке красным закрашены области, прилегающие к интерференционным максимумам, синим – к минимумам. Первая картина получается, когда источник и наблюдатель находятся на одном и том же расстоянии от зеркала, она обладает вертикальной осью симметрии. Последняя – когда источник располагается непосредственно перед наблюдателем, она центрально симметрична.

Все эти картины, может быть не в полном объеме, вы можете увидеть в запыленном зеркале, перемещая маленький фонарик относительно глаза.

**Ликоподий, корона и кольца Кеттле.** Корона, о которой здесь пойдет речь, – это те самые цветные кольца, которые мы видим, например, вокруг луны, светящей сквозь легкую дымку.

За образование короны отвечает дифракционное рассеяние света на мелких каплях воды или на других частицах, имеющих одинаковые размеры и одинаковую форму. В этом отношении повезло тем, кто носит очки. В вечернее время достаточно подышать на стеклышки очков, и мир волшебным образом преобразуется – все пространство вокруг каждого фонаря, вокруг каждого источника света заполняется разноцветными кольцами.

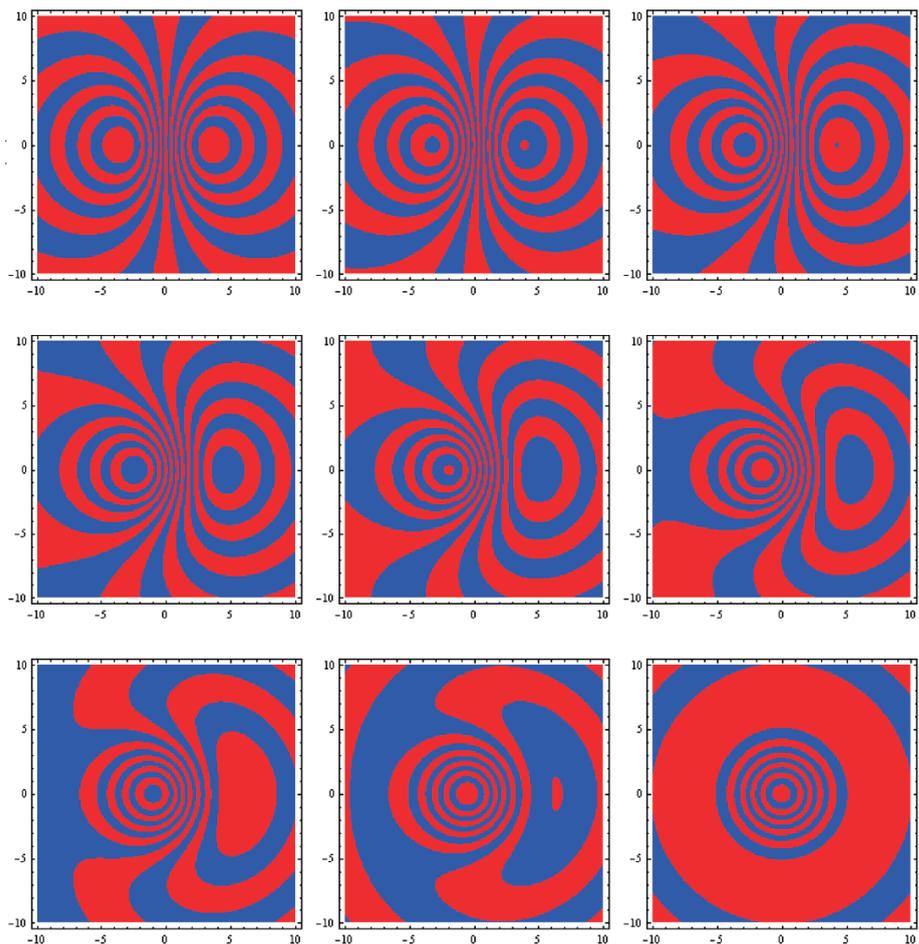


Рис.5. Интерференционные картины, возникающие при перемещении источника относительно наблюдателя



Рис.6. Корона, окружающая источник; вид через стекло, посыпанное лишайником

В оптике для исследования и демонстрации дифракционных явлений традиционно используется лишайник – споры растения «плаун булавовидный». Эти споры имеют сферическую форму и отличаются постоянством диаметра – порядка 30 мкм. Как выглядит источник света, если смотреть на него через стекло, посыпанное лишайником, показано на рисунке 6.

Можно увидеть корону и глядя на изображение источника в запотевшем зеркале. К сожалению, капельки на зеркале испаряются, и поверхность зеркала быстро становится чистой. Но лишайник никуда не испарится, и в запыленном им зеркале мы сможем увидеть замечательную картину (рис.7), включающую одновременно и кольца Кетле, и корону.

**Вся оптика – в одной луже.** От лишайника перейдем к другому биологическому объекту – к одной из микроскопи-

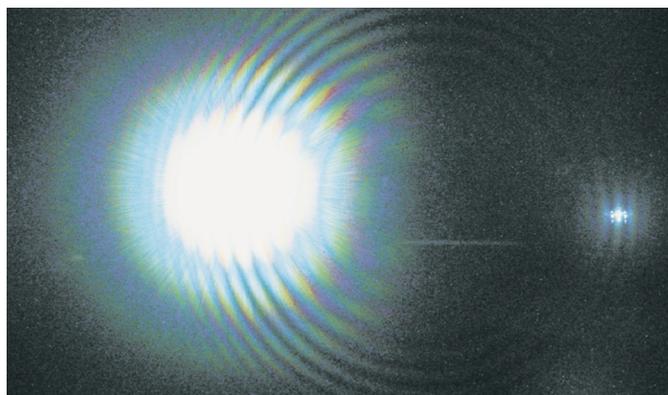


Рис.7. Кольца Кетле и корона в зеркале, запыленном лишайником

ческих водорослей класса хризомонадовых (*Chromophyton Rosanoffii*). Каждая ячейка этих водорослей в одной из фаз своего развития выходит на поверхность воды и располагается над ней в виде прозрачного шарика размером 4–9 мкм, возвышающегося на небольшом стебельке. Такое расположение ячеек полностью соответствует нашему рисунку 3, если в качестве рассеивающей частицы принять эту сферическую ячейку, а в качестве отражающей поверхности – поверхность воды. Да и преломление здесь тоже отсутствует, поскольку между ячейкой водорослей и поверхностью воды нет ничего, кроме воздуха.

В 2006 году Марко Рииконен разместил на своем сайте (<http://www.ursa.fi/~riikonen/>) фотографии, сделанные

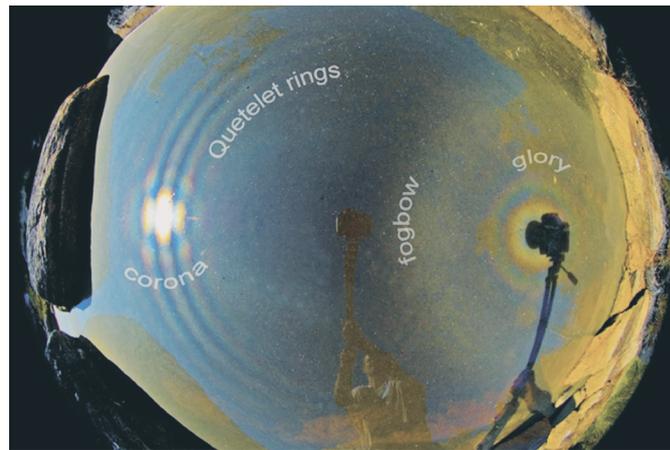


Рис.8. Марко Рииконен: кольца Кетле, корона, глория и радуга

им на небольшом скалистом острове в Балтийском море. И дал зарегистрированным им явлениям общее название – «водорослевая оптика» (algal optics). На поверхности небольшого внутреннего водоема площадью в несколько квадратных метров, покрытого пленкой упомянутых водорослей, им были зафиксированы сразу несколько оптических феноменов. Так, на одной из фотографий отчетливо видны кольца Кетле и корона, созданные водорослями, расположенными над поверхностью воды. Эта фотография удивительным образом совпадает с нашей фотографией, представленной на рисунке 7.

На сайте Рииконена имеется и вовсе фантастическая фотография (рис.8), на которой одновременно видны кольца Кетле (Quetelet rings), корона (corona), глория (glory) и радуга (fogbow). Заметим, что и глория и радуга образуют концентрические круги с центром в точке, противоположной источнику света относительно наблюдателя. Условие образования глории – это наличие в воздухе капелек воды диаметром менее 20 мкм, а, как мы уже говорили, размер ячейки наших водорослей как раз порядка 10 мкм. Что касается радуги, образованной на каплях такого размера, то она выглядит бесцветной и носит специальное название – туманная радуга (fogbow), именно она и видна на последней фотографии.

**Физическое выпрямление световых лучей.** Вернемся к рисунку 4, который мы получили из рисунка 3 с помощью формального приема – геометрического отражения. Между тем, рисунок допускает простую физическую реализацию.

Один и тот же стохастический растр напечатать два раза – на двух прозрачных пленках. Наложив две идентичные пленки друг на друга и добившись точного совмещения двух растров, мы получим полное физическое подобие рисунка 4. Каждой точке-частице будет соответствовать точно такая же точка-частица на другой пленке, расстояние между такими точками будет равно толщине пленки. Поэтому можно попытаться зафиксировать кольца Кетле, наблюдая источник света сквозь две одинаковые пленки, наложенные друг на друга. К сожалению, наши попытки сделать это пока не увенчались успехом.

\* \* \*

В заключение советуем вам посетить гигантскую ежедневно пополняемую энциклопедию атмосферных оптических явлений – сайт <http://www.atoptics.co.uk>, где на многочисленных фотографиях можно увидеть и радугу, и корону, и глорию, и кольца Кетле и много чего другого красивого и интересного.

# Минималистские задачи

С. БЕЛЯЕВ

Дано — ничего, найти — все, всем, чем можно, — пренебречь.

Обобщенная формулировка качественной задачи по физике

**КАЧЕСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ В ФИЗИКЕ ДАВНО И ВПОЛНЕ** заслуженно пользуются популярностью. Именно они дают мощный эмоциональный заряд — почти из ничего, из минимального набора начальных данных (а порой и вообще без них) получаются глубокие и подчас неочевидные выводы. Приведем несколько примеров.

**Задача 1.** На край абсолютно гладкого и абсолютно плоского стола положили абсолютно гладкий шарик. Трения нет, сопротивления воздуха нет. Определите, будет ли двигаться шарик, и если да, то как.

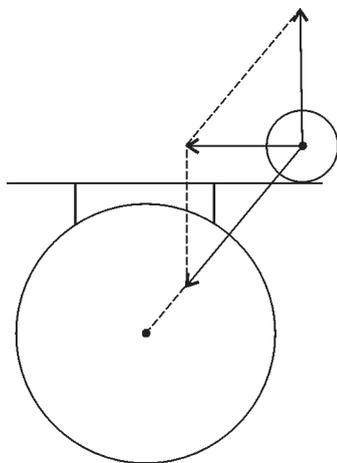


Рис. 1

Стандартный рисунок заставляет сделать вывод, что сила тяжести компенсируется силой реакции опоры и равнодействующая равна нулю, т.е. шарик будет оставаться в положении равновесия. Однако, если сделать рисунок, на котором размеры стола соизмеримы с размерами Земли (рис. 1), то становится понятно, что в нашей ситуации равнодействующая не равна нулю. Таким образом, на шарик действует сила, которая имеет составляющую, направленную к центру стола. Под действием этой силы шарик начнет колебательные движения с амплитудой, равной половине ширины стола.

Подчеркнем, что в задаче идет речь об идеальных условиях: трения нет и Земля абсолютно круглая и однородная. Реально же этот эффект не может наблюдаться именно потому, что из-за малых размеров стола по сравнению с земным шаром сила тяжести образует такой малый угол с перпендикуляром к поверхности стола, что мы просто не сможем уменьшить трение настолько, чтобы шарик покатился.

Понятно также, что количество подробностей, как всегда, неисчерпаемо. Если уж учитывать размер Земли по сравнению с размером стола, то нужно еще учитывать неоднородность поля силы тяжести, неровности поверхности Земли, приливы и отливы (они тоже меняют местоположение центра тяжести Земли, а значит, и направление ускорения свободного падения). Однако качественные задачи для того и даются, чтобы научиться абстрагироваться от несущественных подробностей и видеть те основные законы и явления, которые работают в данной задаче. Эта задача показывает, сколь далеки идеальные условия, рассматриваемые в большинстве задач, от условий реально наблюдаемых.

**Задача 2.** Как известно, летом железнодорожный рельс длиннее, чем зимой, что является следствием теплового расширения металла. Именно поэтому между рельсами оставляют небольшой зазор. Однако представим, что два рельса длиной по 1 км приставлены в стык и закреплены только по краям. Пусть летом длина каждого рельса увеличилась на 1 м и в середине рельсы встали «домиком», образуя равнобедренный треугольник (основание 2 км, боковая сторона 1 км и 1 м). Оцените, какова высота этого равнобедренного треугольника.

**Решение.** Обычно на этот вопрос дается сильно заниженный ответ «на глаз». Прямой подсчет по теореме Пифагора дает совершенно фантастический ответ:  $\sqrt{1001^2 - 1000^2} = \sqrt{2001} \approx 44,7$  метра!

\*\*\*

В школьной геометрии тоже есть ряд задач, отличающихся минимальным количеством данных, в которых требуется найти то, что на первый взгляд и найти-то невозможно. Именно это роднит такие задачи с качественными задачами по физике. Вниманию читателя предлагается коллекция задач с минимальными условиями, из которых можно найти довольно много. И чем меньше дано в условии и чем больше получается в результате, тем красивее и изящнее задача. Ясно, что решение таких задач всегда будет связано либо со знанием некоторых замечательных фактов, либо с изобретательностью решающего.

**Задача 3.** Представим себе, что земной шар плотно обтянут по экватору веревкой. Предположим, что длину этой веревки увеличили на 1 метр и расположили так, что она всюду одинаково отстоит от Земли. Может ли в образовавшийся зазор пролезть мышь?

**Решение.** Это — хорошо известная задача с совершенно ошеломляющим ответом. Причем ответ настолько неожидан, что, даже когда его уже знаешь, — не веришь.

Подсчет не представляет трудностей: пусть  $R$  — радиус Земли, тогда начальная длина веревки  $2\pi R$ . Радиус  $R_0$  окружности, длина которой на 1 метр больше, находится из уравнения  $2\pi R_0 = 2\pi R + 1$ , т.е.  $R_0 = R + 1/(2\pi)$ . Откуда величина возникающего зазора равна  $R_0 - R = 1/(2\pi) \approx 16$  см. Так что в такую щель вполне может проскочить мышь. Однако важно не это — удивительно, что ответ не зависит от радиуса Земли! Другими словами, тот же результат получится на Луне, на Марсе и, во что уже совсем поверить невозможно, на футбольном мяче. Из полученного результата вытекает, что если футбольный мяч обтянуть веревкой по экватору и затем увеличить ее длину на 1 метр, то зазор, будучи равномерно распределенным по экватору, будет точно такой же — 16 см!

**Задача 4.** К двум пересекающимся окружностям проведена общая касательная. Через точки касания и точку пересечения проведена окружность. Найдите ее радиус, если радиусы исходных окружностей равны  $R$  и  $r$ .

**Решение.** Пусть  $AB$  — общая касательная к пересекающимся в точках  $M$  и  $N$  окружностям с центрами  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 2). Удивительно, что ответ не зависит от того, будем

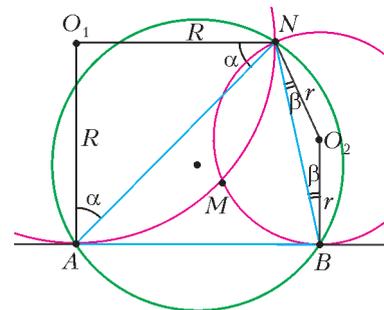


Рис. 2

мы рассматривать треугольник  $ABM$  или треугольник  $ABN$  – радиусы их описанных окружностей равны!

Пусть  $\angle O_1AN = \alpha$ ,  $\angle O_2BN = \beta$ ,  $\rho$  – радиус окружности, описанной около треугольника  $ABN$ . Тогда  $AN = 2R \cos \alpha$ ,  $BN = 2r \cos \beta$ . По теореме синусов для треугольника  $ABN$  имеем  $\rho = \frac{BN}{2 \sin \angle A}$ , а также  $\rho = \frac{AN}{2 \sin \angle B}$ . Так как в треугольнике  $ABN$   $\angle A = 90^\circ - \alpha$ ,  $\angle B = 90^\circ - \beta$ , то  $\rho = \frac{2R \cos \alpha}{2 \cos \beta} = R \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$  и  $\rho = \frac{2r \cos \beta}{2 \cos \alpha} = r \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$ , откуда  $\rho^2 = Rr$ , или  $\rho = \sqrt{Rr}$ .

Более того, совсем уж неправдоподобно, что ответ не будет зависеть от расстояния между центрами окружностей, что и делает эту задачу минималистской.

**Задача 5.** В треугольнике  $ABC$  и  $CDA$  (точки  $B$  и  $D$  расположены по одну сторону от  $CA$ ) вписаны окружности. Найдите длину общей внешней касательной к этим окружностям, если:

а)  $AB = 5$ ,  $BC = 7$ ,  $CD = DA$ ; б)  $AB = 7$ ,  $BC = CD$ ,  $DA = 9$ .

**Решение.** а) Как известно, существует формула для вычисления длины  $d$  общей внешней касательной к двум окружностям радиусов  $R$  и  $r$ , расстояния между центрами которых равно  $a$ :

$$d = \sqrt{a^2 - (R - r)^2}.$$

Однако ясно, что в задаче дано столь мало, что не представляется возможным найти все эти величины. Тем не менее, искомую длину найти все же можно. Для этого понадобится лишь следующий факт: если  $p$  – полупериметр треугольника  $ABC$  и  $BC = a$ , то

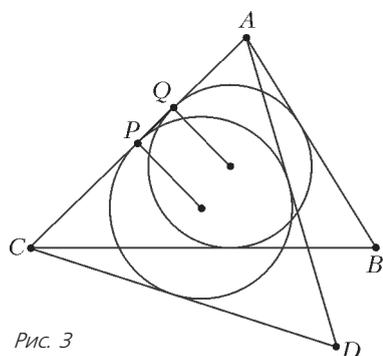


Рис. 3

длина касательной из вершины  $A$  к вписанной окружности равна  $p - a$ .

**Упражнение 1.** Докажите это.

Пусть  $p_1$  и  $p_2$  – полупериметры треугольников  $ABC$  и  $ACD$  соответственно, тогда (рис.3)

$$\begin{aligned} PQ &= |AP - AQ| = |(p_2 - CD) - (p_1 - BC)| = \\ &= \frac{1}{2} |(AC + AD - CD) - (AC + AB - BC)| = \frac{1}{2} |BC - AB| = 1. \end{aligned}$$

б) Этот пункт решается аналогично:

$$\begin{aligned} PQ &= |AP - AQ| = |(p_2 - CD) - (p_1 - BC)| = \\ &= \frac{1}{2} |(AC + AD - CD) - (AC + AB - BC)| = \frac{1}{2} |AD - AB| = 1. \end{aligned}$$

**Задача 6.** Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  расположены на одной прямой. Через точку  $B$  проходит некоторая прямая. Пусть  $M$  – произвольная точка на этой прямой. Найдите

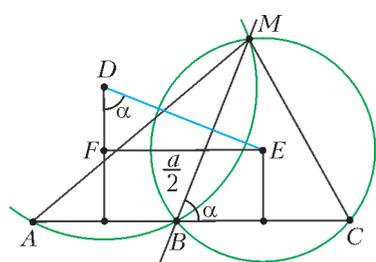


Рис. 4

расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $MAB$  и  $MBC$ , если  $AC = a$ ,  $\angle MBC = \alpha$ .

**Решение.** Центры  $D$  и  $E$  данных окружностей проектируются в середины отрезков  $AB$  и  $BC$

(рис.4). Расстояние между этими проекциями равно  $AC/2 = a/2$ . Углы  $EDF$  и  $MBC$  равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Из треугольника  $DEF$  имеем

$$DE = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

**Задача 7.** На гипотенузе прямоугольного треугольника во внешнюю сторону построен квадрат и проведен отрезок, соединяющий вершину прямого угла с центром квадрата. Найдите углы между этим отрезком и катетами. Найдите также длину этого отрезка, если сумма катетов равна  $d$ .

**Решение.** Эта задача – прекрасная иллюстрация метода вспомогательной окружности. В самом деле, так как углы  $ACB$  и  $AFB$  – прямые ( $F$  – центр квадрата; рис. 5,а), то они опираются на диаметр  $AB$  окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Но тогда  $\angle BCF = \angle BAF = 45^\circ$  как опирающиеся на одну и ту же дугу.

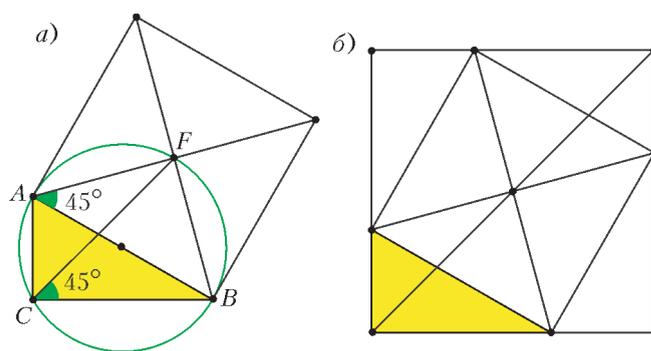


Рис. 5

Длину отрезка  $CF$  легко найти, если заметить, что данные треугольник и квадрат порождают квадрат, стороны которого содержат вершины данного квадрата, причем центры обоих квадратов совпадают (рис. 5,б). Следовательно, удвоенная длина отрезка  $CF$  равна диагонали большого квадрата, сторона которого равна сумме катетов исходного прямоугольного треугольника. Окончательно,

$$CF = \frac{1}{2} d \sqrt{2} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

**Задача 8.** На плоскости проведены прямая и окружность с центром на этой прямой. Только с помощью одной линейки опустите перпендикуляр к данной прямой из точки, не лежащей на данной окружности и данной прямой.

**Решение.** Построение. Несмотря на то, что существует три способа расположить точку  $D$ , из которой будет опущен перпендикуляр к прямой  $AB$  ( $AB$  – диаметр данной окружности; рис.6), все построения аналогичны. Эти случаи таковы: треугольник  $ABD$  остроугольный, точка  $D$  лежит вне круга, ограниченного данной окружностью; треугольник  $ABD$  тупоугольный, точка  $D$  лежит вне круга; точка  $D$  лежит внутри круга. Опишем все построения сразу (последовательность построения показана на всех рисунках цифрами).

1. Строим точку  $E$  – точку пересечения прямой  $AD$  с окружностью.
2. Строим точку  $F$  – точку пересечения прямой  $BD$  с окружностью.
3. Строим прямую  $AF$ .
4. Строим прямую  $BE$ . Пусть  $H$  – точка пересечения прямых  $AF$  и  $BE$ .
5. Строим прямую  $DH$  – она и есть искомым перпендикуляром.

**Доказательство.** Углы  $AEB$  и  $AFB$  – прямые, так как опираются на диаметр  $AB$ , следовательно,  $H$  – ортоцентр

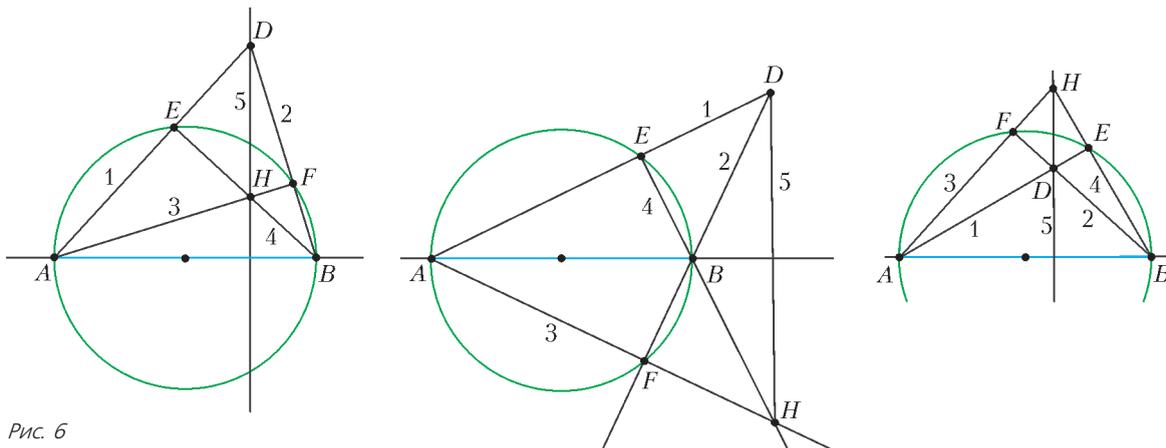


Рис. 6

треугольника  $ABD$ . Значит, прямая  $DH$  – высота этого треугольника, т.е.  $DH \perp AB$ .

**Задача 9.** Пусть  $R$  и  $r$  – радиусы описанной и вписанной окружностей некоторого треугольника. Докажите, что  $R \geq 2r$ . Найдите аналогичное неравенство в стереометрии.

**Решение.** Эта задача легко решается с использованием формулы Эйлера для расстояния  $d$  между центрами вписанной и описанной окружностей (радиусы которых равны  $r$  и  $R$  соответственно):  $d^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r)$ . Откуда непосредственно следует требуемое неравенство. Однако его можно получить и без применения формулы Эйлера.

В самом деле, из всех окружностей, пересекающих все стороны треугольника, наименьший радиус имеет вписанная окружность. Известно, что радиус окружности, проходящей через середины сторон треугольника (окружность 9 точек), равен  $R/2$ . Значит,  $R/2 \geq r$ , т.е.  $R \geq 2r$ , что и требовалось доказать.

Аналогом формулы Эйлера в пространстве является формула Дюранда:  $d^2 = (R - r)(R + 3r)$ , где  $d$  – расстояние между центрами вписанной и описанной сфер (радиусы которых равны  $r$  и  $R$ ) правильной треугольной пирамиды. Из нее непосредственно следует, что  $R \geq 3r$ . Однако можно не пользоваться столь экзотической формулой и предложить доказательство неравенства  $R \geq 3r$  не только для правильной треугольной пирамиды, но и для произвольного тетраэдра.

В самом деле, из всех сфер, пересекающих все грани тетраэдра, наименьший радиус имеет вписанная сфера. Известно, что радиус сферы, проходящей через точки пересечения медиан граней тетраэдра, равен  $R/3$ . Значит,  $R/3 \geq r$ , т.е.  $R \geq 3r$ , что и требовалось доказать.

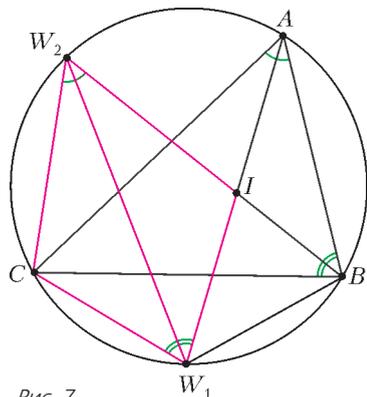


Рис. 7

**Упражнения**

2. Докажите формулу Дюранда.

3. Рассмотрите рисунок 7 ( $I$  – центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ ). Найдите на нем равные треугольники  $CW_1W_2$  и  $IW_1W_2$ . Докажите теорему трилистника:  $CW_1 = IW_1 = BW_1$ .

4. Рассмотрите рисунок 8. Почему равны треугольники  $CHN_1$  и  $CN_1H_1$ ? Докажите, что точка, симмет-

ричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на описанной окружности.

**Задача 10.** Ортоцентр равнобедренного треугольника лежит на его вписанной окружности. Найдите углы треугольника.

**Решение.** Эта задача – одно из самых изящных применений теоремы трилистника:  $CW = IW = BW$ , где  $I$  – центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $W$  – точка пересечения биссектрисы  $AI$  с описанной окружностью (рис.9). Кроме того, при решении нам понадобится тот факт, что точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на описанной окружности.

Пусть  $M_1$  – середина  $BC$ . Из условия задачи вытекает, что  $HM_1 = 2r$ ,

где  $r$  – радиус вписанной окружности. Кроме того, точкой, симметричной точке  $H$  относительно стороны  $BC$ , будет точка  $W$ . Следовательно,  $M_1W = HM_1 = 2r$ . Вместе с тем, инцентр  $I$  – середина отрезка  $HM_1$ , т.е.  $IW = 3r$ . По теореме трилистника  $CW = IW = 3r$ . Так как треугольник равнобедренный, то угол  $B$  равен углу  $C$ , а  $\angle CBA = \angle CWM_1$  как опирающиеся на одну дугу. Из треугольника  $CWM_1$  имеем

$$\cos \angle CWM_1 = \frac{2r}{3r} = \frac{2}{3} = \cos \angle B = \cos \angle C.$$

Итак,  $\angle B = \angle C = \arccos \frac{2}{3}$ ,  $\angle A = 180^\circ - 2 \arccos \frac{2}{3}$ .

**Задача 11.** Пусть  $H$  – ортоцентр треугольника  $ABC$ . Найдите угол  $C$ , если  $CH = AB$ .

**Решение.** Эта задача допускает даже два способа решения, и каждый из них по своему изящен.

*Первый способ (геометрический).* Так как  $AB = CH$ , то окружности, построенные на этих отрезках как на диаметрах, равны (рис.10). Точки  $M$  и  $N$  их пересечения – это

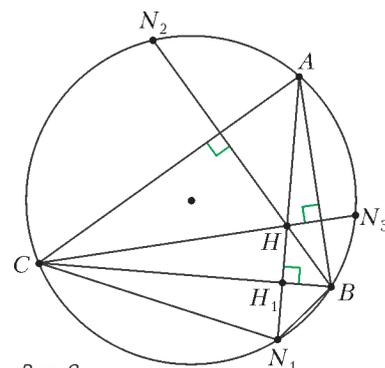


Рис. 8

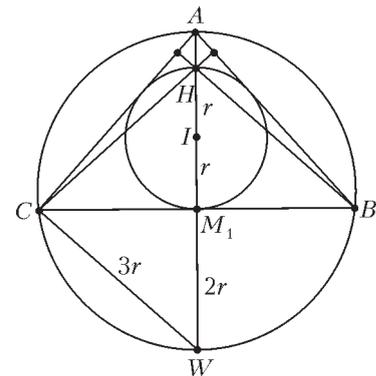


Рис. 9

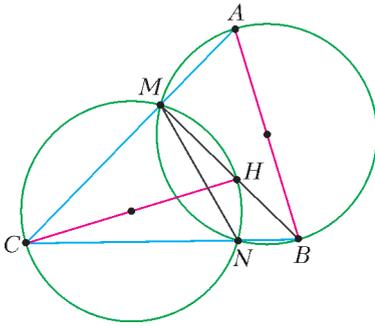


Рис. 10

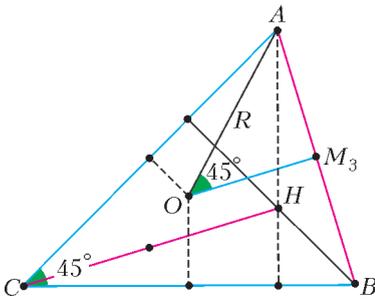


Рис. 11

**Задача 12.** Ортоцентр  $H$ , инцентр  $I$ , а также вершины  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  лежат на одной окружности. Найдите угол  $C$ .

**Решение.** Воспользуемся тем, что  $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$ , а  $\angle ANB = 180^\circ - \angle C$  (рис.12), тогда имеем

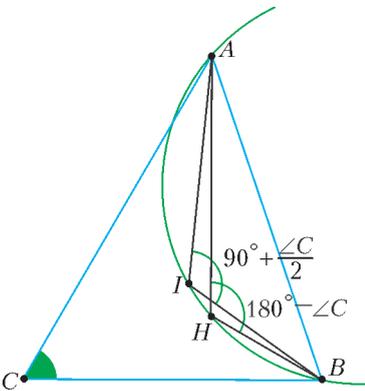


Рис. 12

$$\begin{aligned} \angle KK_1B &= 180^\circ - \angle KK_1C = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle C}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}, \\ \angle BKK_1 &= 180^\circ - \frac{\angle B}{2} - \left(90^\circ + \frac{\angle C}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{2} = \\ &= 90^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = \frac{\angle A}{2}. \end{aligned}$$

Значит,  $\angle K_2KB = 180^\circ - \frac{\angle A}{2}$ , следовательно,  $\angle K_2KB + \angle K_2AI = 180^\circ$ , т.е. четыре точки  $I, K, K_2$  и  $A$  лежат на одной окружности. В этой окружности угол  $\angle IK_2A$  – прямой

точки, из которых рассматриваемые отрезки видны под прямым углом. Ясно, что это основания высот треугольника, проведенных из вершин  $A$  и  $B$ . Основное соображение: общая хорда  $MN$  двух равных окружностей видна из точек этих окружностей под одним и тем же углом.

Следовательно,  $\angle MCN = \angle MBN$ , т.е. треугольник  $MCB$  прямоугольный и равнобедренный, значит,  $\angle C = 45^\circ$ .

**Второй способ (формульно-геометрический).** Пусть  $O$  (рис.11) – центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Тогда  $\angle AOB = 2\angle C$  – центральный угол. Следовательно,  $\angle AOM_3 = \angle C$ , где  $M_3$  – середина стороны  $AB$ . По формуле  $CH = 2OM_3 = AB \operatorname{ctg} \angle C$  находим  $\operatorname{ctg} \angle C = \frac{CH}{AB} = 1$ , откуда  $\angle C = 45^\circ$ .

$$90^\circ + \frac{\angle C}{2} = 180^\circ - \angle C, \text{ откуда } \angle C = 60^\circ.$$

**Упражнение 5.** Докажите, что  $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2}$ .

**Задача 13.** Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $AC$  и  $BC$  в точках  $K_2$  и  $K_1$  соответственно. Биссектриса угла  $B$  пересекает  $K_1K_2$  в точке  $K$ . Найдите угол  $\angle AKB$ .

**Решение.** Из рисунка 13 получается

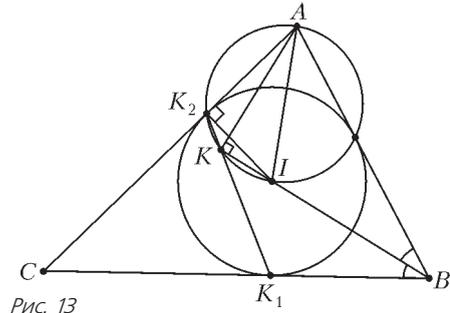


Рис. 13

(угол между касательной и радиусом, проведенным в точку касания), следовательно, угол  $\angle AKI$  – тоже прямой.

**Задача 14.** Имеется изображение (параллельная проекция на некоторую плоскость) треугольника и центра описанной около него окружности. Постройте изображение ортоцентра этого треугольника.

**Решение.** Пусть на некоторой плоскости в пространстве изображен треугольник  $ABC$  и его центр описанной окружности  $O$  (рис.14). Соединив точку  $O$  с серединой  $M_1$  стороны  $BC$ , мы получим изображение отрезка  $OM_1$ , про который известно, что  $AH = 2OM_1$ , где  $H$  – ортоцентр треугольника  $ABC$ . Так как при проектировании сохраняются параллельность и отношение отрезков, то для построения изображения точки  $H$  достаточно через точку  $A$  провести прямую, параллельную  $OM_1$ , и на этой прямой отложить отрезок  $AH$ , вдвое больший  $OM_1$ .

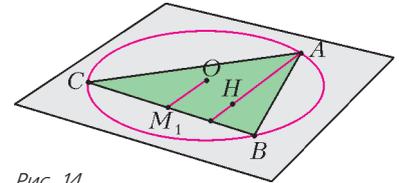


Рис. 14

**Задача 15.** Центр первой сферы радиуса  $R$  расположен на поверхности второй сферы. Известно, что эти сферы пересекаются. Найдите площадь части второй сферы, расположенной внутри первой.

**Решение.** Площадь сферического сегмента высоты  $h$  вычисляется по формуле  $S = 2\pi R_0 h$ , где  $R_0$  – радиус сферы. Пусть центр первой сферы находится в точке  $A$  поверхности второй сферы и пусть  $AB$  – диаметр второй сферы,  $C$  – некоторая точка на линии пересечения сфер (рис.15). Треугольник  $ABC$  – прямоугольный, так как  $AB = 2R_0$  – диаметр. Тогда высота  $h$  искомого сферического сегмента в этом треугольнике является проекцией катета  $AC = R$  на гипотенузу. Пользуясь известным соотношением в прямоугольном треугольнике, получаем  $R^2 = 2R_0 h$ . Откуда площадь сферического сегмента равна  $S = \pi R^2$ . Удивительно, что ответ не зависит от радиуса второй сферы!

Рис. 15

**Задача 16. а)** Даны две концентрические окружности. Найдите площадь образованного ими кольца, если хорда большей окружности, касающаяся меньшей, равна  $a$ .

**б)** Окружности оснований цилиндра, высота которого равна  $h$ , расположены на поверхности сферы. Найдите объем части шара, ограниченной сферой и боковой поверхностью цилиндра.

**Решение.** а) Площадь кольца подсчитывается по формуле  $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$ . При этом разность квадратов

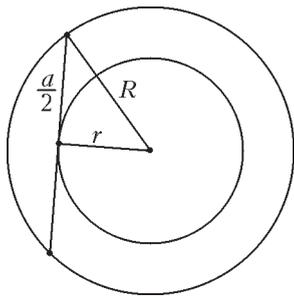


Рис. 16

радиусов окружностей может быть найдена из прямоугольного треугольника (рис. 16):  $R^2 - r^2 = a^2/4$ , следовательно,

$$S = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Безусловно, приятно, что площадь кольца не зависит от радиусов кругов, однако стереометрический аналог этой задачи потрясает окончательно!

б) Разумеется, в стереометрической задаче можно было бы тоже написать теорему Пифагора (один или несколько раз), составить систему из нескольких уравнений с несколькими неизвестными, решить ее. В результате многое сократится и не войдет в окончательный красивый ответ  $V = \frac{\pi h^3}{6}$ , вид которого должен навести на мысль, что существует и простое решение.

**Замечание.** Самое простое, можно даже сказать вероломное, «решение» таково. Так как ответ не зависит ни от радиуса шара, ни от радиуса цилиндра, а зависит только от его высоты, то объем искомого тела не изменится, если мы стянем цилиндр в отрезок, уменьшая его радиус до нуля. При этом диаметр шара станет равным  $h$ , и этот шар будет иметь тот же объем, что и искомого тела. Ответ:  $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{\pi h^3}{6}$ .

**Упражнение 6.** Найдите как можно больше ошибок в этом «решении».

Разумеется, существует не очень сложное и вместе с тем изящное решение. Для поиска требуемого объема воспользуемся **принципом Кавальери**:

Если два тела можно так расположить в пространстве, что любая плоскость, параллельная заданной плоскости, пересекает эти тела по фигурам, имеющим одинаковые площади, то эти тела имеют одинаковые объемы.

Будем пересекать сферу и цилиндр плоскостями, параллельными плоскостям оснований цилиндра (рис. 17, а). Тогда

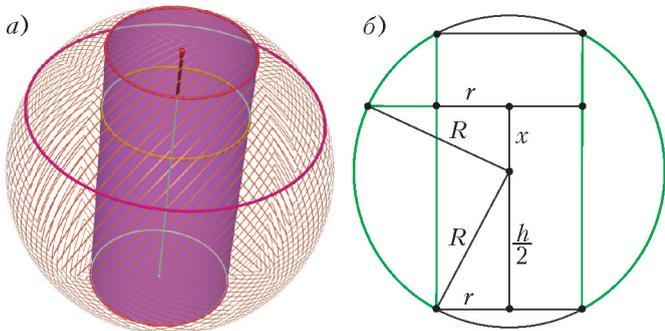


Рис. 17

сечением искомого тела каждой из таких плоскостей является кольцо (или точка). Для поиска его площади найдем его внешний радиус (внутренний радиус равен  $r$  — радиусу цилиндра). Рассмотрим плоскость осевого сечения цилиндра (рис. 17, б). Пусть след секущей плоскости на рассматриваемой плоскости расположен на расстоянии  $x$  от центра сферы  $\left(x \in \left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]\right)$ . Тогда внешний радиус кольца сечения равен  $\sqrt{R^2 - x^2}$ . Площадь кольца равна

$$S = \pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - x^2 - r^2).$$

Заметим теперь, что именно такую площадь будет иметь сечение шара радиуса  $\sqrt{R^2 - r^2} = \frac{h}{2}$  плоскостью, проходящей на расстоянии  $x$  от центра этого шара. По принципу Кавальери, объем искомого тела равен объему этого шара, т.е.  $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{\pi h^3}{6}$ .

Итак, если в деревянном шаре сделать цилиндрический пропил с осью, проходящей через центр шара, то объем полученного тела не зависит ни от радиуса исходного шара, ни от радиуса пропила, а зависит только от его длины! Именно поэтому размер золотого кольца в ювелирном магазине может быть увеличен без добавления драгоценного металла. Объем кольца зависит только от «длины пропила» в нем, но не от размера кольца!

**Задача 17.** Одному пирату было известно, что в местности, где зарыт клад, растут только три дерева: дуб, сосна и береза. Кроме того, пирату было известно, как найти этот клад. Прежде всего надо стать под березой лицом к прямой линии, соединяющей дуб и сосну. (На рисунке 18 все деревья обозначены первыми буквами их названий.) При этом дуб должен оказаться справа, а сосна слева. Потом нужно пойти к дубу, считая шаги, а дойдя до дуба, повернуть под прямым углом направо и пройти столько же шагов, сколько уже пройдено от березы до дуба. В этом месте нужно вбить в землю колышек (точка  $K_1$  на рисунке). Потом нужно вернуться к березе и пойти от нее к сосне, снова считая шаги. Дойдя до сосны, нужно повернуть под прямым углом налево и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до сосны. В этом месте нужно вбить в землю второй колышек (точка  $K_2$  на рисунке). Клад зарыт посередине между колышками (точка  $K$  на рисунке).

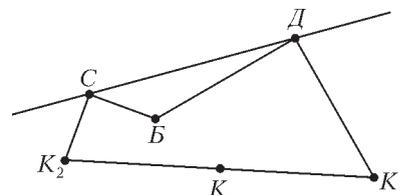


Рис. 18

Пират был уверен, что без труда найдет клад по столь подробной инструкции. Но когда он приехал в эту местность, то обнаружил там только дуб и сосну. Береза бесследно исчезла. Однако пират все же нашел клад. Как ему это удалось?

**Решение.** Понятно, что пират не стал бы долго думать и рассуждал бы примерно так: «Если бы береза была здесь, то клад был бы здесь, а если бы береза была тут, то клад был бы там». И вдруг! О чудо! Он бы заметил, что местоположение клада не зависит от местоположения березы! Ясно, что он тут же взял бы в руки лопату и занялся кладом, отложив доказательство до лучших времен.

Оставим в этом захватывающем месте нашего удачливого кладоискателя и заинтересуемся именно доказательством описанного факта. Это можно сделать по-разному. В упражнении 13 читателю предлагается найти геометрическое доказательство, однако сейчас нас будет интересовать кинематический метод, подробно обсуждавшийся в статье «Кинематика в планиметрии» В.Рыжика и Б.Сотниченко в «Кванте» №5 за 2002 год.

Пусть береза  $B$  начала двигаться (ой!) и  $\mathbf{v}$  — вектор ее мгновенной скорости. Так как отрезок  $DK_1$  получается из отрезка  $DB$  поворотом на  $90^\circ$ , то точка  $K_1$  тоже будет двигаться, причем вектор ее скорости  $\mathbf{v}_1$  будет получаться из вектора  $\mathbf{v}$  поворотом на  $90^\circ$ . Аналогично, вектор  $\mathbf{v}_2$  скорости точки  $K_2$  получается из вектора  $\mathbf{v}$  поворотом на  $-90^\circ$ . Значит,  $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$ . Следовательно, точка  $K$  как середина

отрезка  $K_1K_2$  имеет скорость  $\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$ , т.е. эта точка неподвижна. Итак, при произвольном движении точки  $B$  точка  $K$  остается неподвижной. Значит, положение клада не зависит от положения березы!

**Упражнения**

7. На плоскости изображена дуга  $AB$  окружности и указан ее центр. Только с помощью циркуля разделите дугу  $AB$  пополам.
8. В задаче о веревке, обтягивающей земной шар по экватору, «оттянем» веревку в одном месте как можно дальше. Может ли в образовавшийся зазор пройти слон?
9. Центр сферы  $\alpha$  лежит на поверхности сферы  $\beta$ . Отношение части поверхности сферы  $\beta$ , лежащей внутри сферы  $\alpha$ , ко

всей поверхности сферы  $\alpha$  равно  $1/5$ . Найдите отношение радиусов сфер  $\alpha$  и  $\beta$ .

10. Определите полную поверхность призмы, описанной около сферы, если площадь ее основания равна  $S$ .
11. На главной диагонали  $AC_1$  и на диагонали  $BA_1$  боковой грани  $ABB_1A_1$  единичного куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  расположены два отрезка  $MN$  и  $PQ$  длины  $1/2$ . Найдите объем тетраэдра  $MNPQ$ .
12. Найдите объем общей части  $n$  одинаковых бесконечных цилиндров радиусом  $r$ , оси которых расположены в одной плоскости, проходят через одну точку, причем угол между двумя соседними равен  $\pi/n$ .
13. Найдите геометрическое доказательство задачи о пирате.
14. Докажите, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, лежат на описанной окружности. Сравните этот результат с упражнением 4.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

# Графики в текстовых задачах

Л.АЛЬТШУЛЕР

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ПОКАЖЕМ, КАК МОГУТ ПРИГОДИТЬСЯ графики при решении задач на движение и на совместную работу. Такие задачи допускают истолкование условия в виде графика равномерного движения (зависимости пройденного пути или доли выполненной работы от времени). Многие из представленных здесь задач допускают обычные алгебраические решения с помощью уравнений или систем уравнений, однако графические (геометрические) методы делают решение наглядным, прозрачным, а потому более понятным. Некоторые задачи не очень-то просто решить алгебраически (попробуйте!).

Приведенные в этой статье задачи взяты из различных книг (см. список литературы в конце статьи), а также из материалов вступительных экзаменов в МГУ им. М.В.Ломоносова.

Начнем с простой задачи, решение которой потребует знания подобия треугольников.

**Задача 1.** Винни-Пух и Пятачок одновременно отправились в гости друг к другу, но поскольку оба всю дорогу считали галок, то не заметили друг друга при встрече.

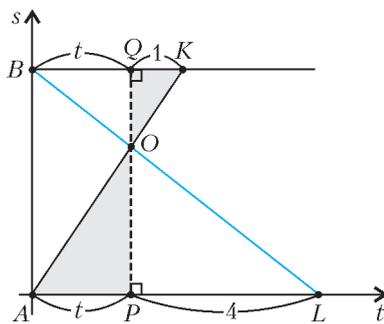


Рис. 1

После встречи Пятачок подошел к дому Винни-Пуха через 4 минуты, а Винни-Пух к дому Пятачка – через 1 минуту. Сколько минут был в пути каждый из них?

**Решение.** На плоскости с координатами  $(t; s)$ , где  $t$  – время (в минутах),  $s$  – расстояние от дома Винни-Пуха (рис.1), изобразим гра-

фики движения Винни-Пуха и Пятачка. На рисунке это отрезки  $AK$  и  $BL$  соответственно,  $O$  – точка пересечения графиков, которая соответствует их встрече. Проведем отрезок  $PQ$ , проходящий через точку  $O$ , перпендикулярно оси времени. Обозначим  $AP = t$  (время до встречи). Из подобия треугольников  $QOK$  и  $POA$ , а также  $QOB$  и  $POL$  имеем  $\frac{1}{t} = \frac{t}{4}$ , что дает  $t = 2$ .

*Ответ.* Винни-Пух был в пути 3 минуты, а Пятачок – 6 минут.

Графический способ позволяет решать и задачи на совместную работу.

**Задача 2.** Первая бригада может выполнить некоторую работу за 36 дней, а вторая – за 45 дней. За сколько дней обе бригады, работая вместе, выполнят всю работу?

**Решение.** На плоскости с координатами  $(t; s)$ , где  $t$  – время (в днях),  $s$  – доля всей работы ( $AB = 1$ ), изображены графики выполнения работ  $AK$  и  $BL$  первой и второй бригадой соответственно (рис.2). Абсцисса точки  $O$  соответствует времени, за которое выполнят всю работу обе бригады, работая одновременно. Из подобия треугольников  $ВОК$  и  $LOA$  получаем, что  $BO : OL = 36 : 45 = 4 : 5$ . Из подобия треугольников  $ВСО$  и  $ВАL$

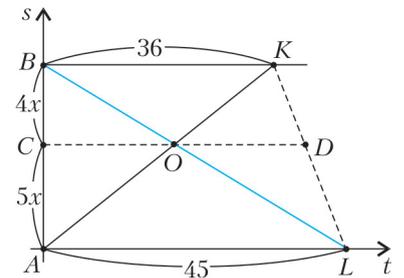


Рис. 2

имеем  $\frac{CO}{AL} = \frac{BO}{BL}$ . Следовательно,  $CO = \frac{4}{9} \cdot 45 = 20$ .

*Ответ.* Обе бригады, работая вместе, выполнят всю работу за 20 дней.

*Замечание.* Стоит обратить внимание на следующий замечательный факт из планиметрии. Четырехугольник  $ABKL$  (см. рис.2) – трапеция, отрезок  $CO$  – половина отрезка  $CD$  (отрезка прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей трапеции, параллельно основаниям). Нетрудно доказать, что этот отрезок – среднее гармоническое оснований трапеции:  $CD = \frac{2ab}{a+b}$ , где  $AL = a$ ,  $BK = b$ .

Рассмотрим другие примеры.

**Задача 3.** Расстояние между пунктами А и В равно 12 км. Турист вышел из пункта А в 9 часов 25 минут и пришел в пункт В в 13 часов 15 минут. На следующий день он отправился в обратный путь, но вышел в 11 часов и пришел в пункт А в 14 часов 40 минут. Найдите, на каком расстоянии от пункта А находится пункт, который турист проходил в один и тот же момент времени как на прямом, так и на обратном пути, и в каком часу он его прошел.

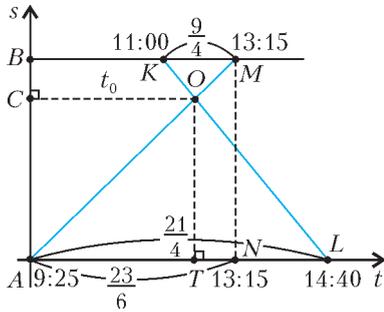


Рис. 3

пересечения графиков, С – пункт, который турист проходил дважды,  $t_0$  – время, когда произошло это событие. Нетрудно вычислить, что  $KM = 2$  ч 15 мин  $= \frac{9}{4}$  ч,  $AL = 5$  ч 15 мин  $= \frac{21}{4}$  ч,  $AN = BM = 3$  ч 50 мин  $= \frac{23}{6}$  ч. Из подобия треугольников AOL и MOK имеем  $\frac{AO}{OM} = \frac{AL}{KM} = \frac{21}{4} : \frac{9}{4} = \frac{7}{3}$ . Из теоремы о пропорциональных отрезках следует  $\frac{AC}{CB} = \frac{AO}{OM} = \frac{7}{3}$ . Так как  $AB = 12$ , то  $AC = \frac{42}{5} = 8,4$  (км). Из подобия треугольников ATO и ANM получаем  $\frac{t_0}{AN} = \frac{AO}{AM}$ . Отсюда  $t_0 = \frac{161}{60} = 2$  ч 41 мин. Учитывая, что турист вышел из пункта А в 9 ч 25 мин, получаем, что пункт С был пройден дважды в 12 ч 6 мин.

Ответ. 8,4 км, 12 ч 6 мин.

**Задача 4.** Однажды я отправился к приятелю. Только я вышел из дома, как от нашей остановки отошел троллейбус, и тогда я решил пойти пешком. Заметив, что в этот момент мимо меня прошел и встречный троллейбус, я стал считать по дороге и те, и другие троллейбусы. У дома моего приятеля меня обогнал  $m$ -й попутный троллейбус, а в противоположном направлении проследовал  $n$ -й встречный троллейбус. Во сколько раз троллейбусы идут быстрее, чем я, если скорость троллейбусов в обоих направлениях, а также интервалы между ними одинаковы и я шел с постоянной скоростью?

**Решение.** Строим графики движения попутных троллейбусов (рис. 4) в виде системы параллельных равноотстоящих прямых (синие сплошные линии). Угол наклона выбираем произвольным, но меньшим  $90^\circ$ ; расстояние между прямыми также выбираем произвольно. Затем строим графики движения встречных троллейбусов в виде второй системы параллельных и равноотстоящих прямых (синие штриховые линии). Угол наклона этих прямых к отрицательному направлению оси времени равен углу наклона первых прямых к положительному направлению этой оси. График моего движения – красная прямая OA, где O – начало счета, т.е. момент встречи двух троллейбусов у моего дома, а точка A – окончание счета (а также момент встречи двух троллейбусов у дома моего приятеля). Число прямых, пересекающих отрезок OA в направлении моего движения, равно  $m$ , а во

второй системе число прямых, пересекающих отрезок OA, будет  $n$ . Отсюда (отрезки измеряются в интервалах движения)  $OB = m - 1$ ,  $OC = n - 1$ . Следовательно,  $BC = OC - OB = n - m$ . Так как треугольник BAC равнобедренный, то  $BD = \frac{BC}{2} = \frac{n - m}{2}$ , и  $OD = OB + BD = m - 1 + \frac{n - m}{2} = \frac{n + m - 2}{2}$ .

Отношение скоростей равно отношению временных отрезков OD и BD, так как проходит одно и то же расстояние:  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n + m - 2}{n - m}$ .

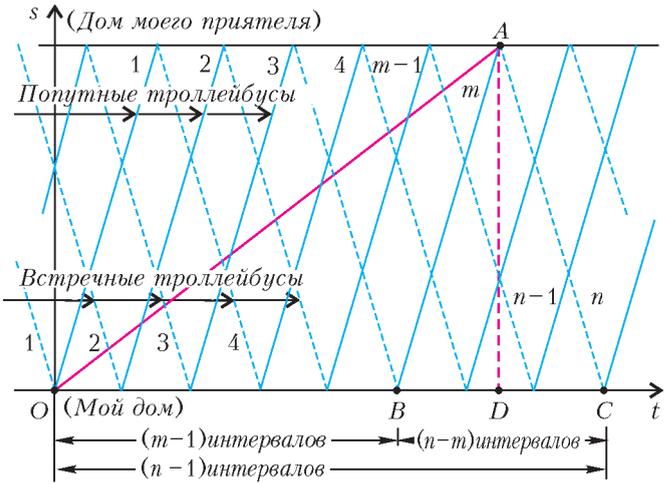


Рис. 4

второй системе число прямых, пересекающих отрезок OA, будет  $n$ . Отсюда (отрезки измеряются в интервалах движения)  $OB = m - 1$ ,  $OC = n - 1$ . Следовательно,  $BC = OC - OB = n - m$ . Так как треугольник BAC равнобедренный, то  $BD = \frac{BC}{2} = \frac{n - m}{2}$ , и  $OD = OB + BD = m - 1 + \frac{n - m}{2} = \frac{n + m - 2}{2}$ .

Отношение скоростей равно отношению временных отрезков OD и BD, так как проходит одно и то же расстояние:  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n + m - 2}{n - m}$ .

Ответ.  $\frac{n + m - 2}{n - m}$ .

**Задача 5.** Две частицы движутся между точками А и В туда и обратно. Первая выходит из А и движется со скоростью 4 м/с. Вторая выходит из В одновременно с первой. Известно, что обе частицы оказались на одинаковом расстоянии от А через 4 с после того, как это произошло в первый раз. Чему равно расстояние АВ, если: а) скорость второй частицы 7 м/с; б) скорость второй частицы 9 м/с?

**Решение.** а) Так же, как и в предыдущих задачах, строим графики движения частиц (зависимость пройденного пути от времени). Точки встречи соответствуют точкам пересечения графиков. Расстояние АВ положим равным S. Все обозначения ясны из рисунка 5. График движения первой частицы – красный, второй – синий. Вторая встреча частиц (L) произойдет уже после того, как первая частица, достигнув В, будет двигаться в обратном направлении ( $BD = \frac{2S}{7}$ ,  $BE = \frac{S}{4}$ , и  $BD > BE$ ). За 4 с вторая частица прошла путь 28 м, который складывается из отрезков  $KK_1$  и  $LL_1$ . Первая частица за 4 с прошла путь 16 м, который равен  $KK_2 + LL_2$ . Ясно, что суммарный путь (см. рис. 5) равен  $2S = KK_1 + LL_1 + KK_2 + LL_2 = 44$  м. Отсюда  $S = 22$  м.

Разберитесь, в чем состоит отличие задачи б) от задачи а), и решите ее самостоятельно.

Ответ. а) 22 м; б) 32,5 м.

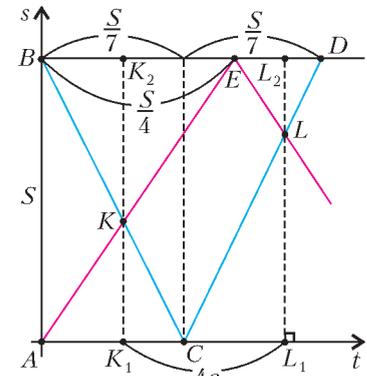


Рис. 5

**Задача 6** (геофак МГУ, 1978). Из пункта *A* в пункт *B* выехал велосипедист, а через 15 минут вслед за ним выехал автомобиль. Автомобиль догнал велосипедиста на середине пути от *A* до *B*, а прибыл в *B*, когда велосипедисту оставалось проехать еще треть пути. За какое время велосипедист проехал путь от *A* до *B*?

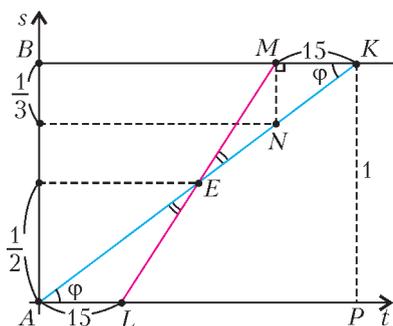


Рис. 6

**Решение.** На плоскости с координатами  $(t; s)$ , где  $t$  – время (в минутах),  $s$  – расстояние от пункта *A*, изобразим графики движения велосипедиста и автомобиля – отрезки *AK* и *LM*,  $AB = 1$  (рис. 6). Все обозначения ясны из рисунка. Из того, что  $\triangle MEK = \triangle LEA$ , следует  $MK = AL = 15$ . Так как  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{KP}{AP} = \frac{MN}{MK}$  и  $KP = AB$ , получаем, что  $AP = 45$ .

Ответ. 45 мин.

**Задача 7** (ВМК МГУ, 1989). Из пункта *A* в пункт *B* вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта *A* выехал велосипедист, а еще через 30 минут – мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое преодолели одинаковую часть пути от *A* до *B*. На сколько минут раньше пешехода в пункт *B* прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт *B* на 1 час позже мотоциклиста?

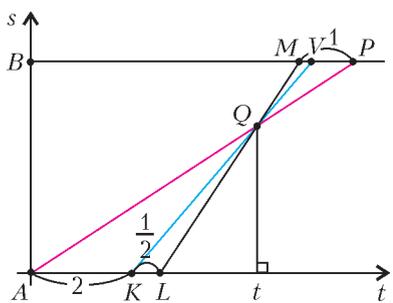


Рис. 7

**Решение.** Нарисуем графики зависимости пройденного пути от времени пешехода, велосипедиста и мотоциклиста – на рисунке 7 это отрезки *AP*, *KV*, *LM* соответственно, точка *Q* на графиках соответствует их встрече,  $AK = 2$ ,  $KL = 1/2$ ,  $MP = 1$ . Время измеряем в часах, расстояния – в долях пути *AB*. Из подобия треугольников  $MVQ$  и  $LKQ$ , а также  $VQP$  и  $KQA$  получаем  $\frac{AK}{KL} = 4 = \frac{VP}{MV}$ .

Отсюда  $VP = 0,8$  ч, т.е. 48 мин.

Ответ. 48 мин.

**Задача 8** (психфак МГУ, 1978). Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одном направлении с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист

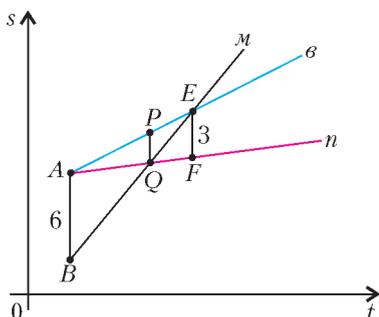


Рис. 8

обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода достиг мотоциклист?

**Решение.** Решение задачи легко увидеть из графиков движения (плоскость  $(t; s)$ ,  $s$  – в км,  $t$  – в условных единицах; рис. 8). Ясно, что  $EF = 3$ ,  $AB = 6$ , а неизвестным является отрезок *PQ*. Четырехугольник *ABFE* – трапеция, поэтому (см. замечание после задачи 2)  $PQ = \frac{EF \cdot AB}{EF + AB} = 2$ .

Ответ. 2 км.

**Задача 9** (олимпиада «Ломоносов», МГУ, 2006). Из пункта *A* в пункт *B* в 8:00 выехал велосипедист, а через некоторое время из *B* в *A* вышел пешеход. Велосипедист прибыл в *B* через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришел в *A* в 17:00 того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из *A* в *B* проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

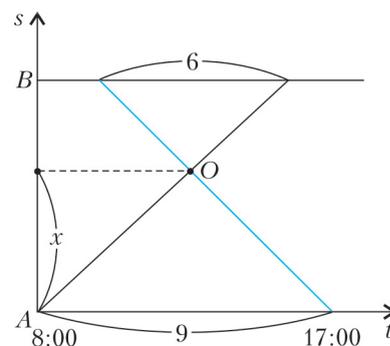


Рис. 9

**Решение.** Графики движения велосипедиста и пешехода в осях (время, расстояние) изображены на рисунке 9. Из подобия двух треугольников со сторонами 9 и 6 получаем уравнение  $\frac{x}{AB-x} = \frac{9}{6}$ . Отсюда  $x = 0,6 AB$ .

Ответ. 0,6.

**Задача 10** (мехмат МГУ, 2004). Дорога проходит последовательно через пункты *A*, *B*, *C* и *D*. Расстояние от *A* до *B* равно 24 км. Из *A* в *D* выехал с постоянной скоростью автомобиль. Одновременно с ним из *B* в *D* отправились с постоянными скоростями велосипедист и мотоциклист. Когда автомобиль догнал велосипедиста, мотоциклист обогнал их на 6 км. В пункте *C* автомобиль догнал мотоциклиста и, доехав до *D*, сразу поехал обратно в *A*, встретившись с велосипедистом во второй раз в *C*. Найдите расстояние между *B* и *C*, если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи автомобиля и велосипедиста в два раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда автомобиль впервые догнал мотоциклиста.

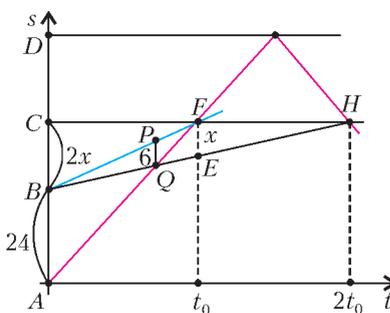


Рис. 10

**Решение.** Решение получается из рисунка 10, где изображены в осях  $(t; s)$  графики движения автомобиля, велосипедиста и мотоциклиста. Четырехугольник *ABFE* – трапеция, следовательно,  $PQ = 6 = \frac{FE \cdot AB}{FE + AB}$ , т.е.  $\frac{24x}{24+x} = 6$ . Отсюда  $x = 8$ .

Но *FE* – средняя линия треугольника *HCB*, поэтому  $BC = 2x = 16$ .

Ответ. 16 км.

**Задача 11** (биофак, ФБИ МГУ, 2006). Из пункта *A* вниз по течению реки одновременно начинают движение плот и лодка. В тот же момент из пункта *B*, находящегося на расстоянии 2 км от *A*, навстречу плоту начинает движе-

ние катер. Собственная скорость лодки равна скорости течения, собственная скорость катера в два раза превышает скорость течения. Встретив плот, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с лодкой, после чего снова разворачивается и движется в сторону плота до встречи с ним, затем опять к лодке и т.д. Сколько раз катер встретит плот за время, в течение которого плот преодолеет расстояние, равное 1000 км?

**Решение.** Пусть скорость плота и течения равна 1 (км в ед. времени), тогда скорости лодки и катера относительно плота равны 1 и 2 соответственно (рис.11, где  $s$  – расстояние до плота в км). Первая встреча катера с плотом происходит в момент 1, когда лодка находится на расстоянии 1 км от них.

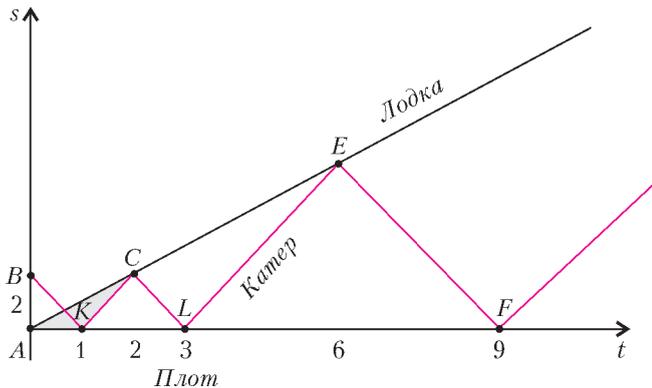


Рис. 11

В момент 2 катер догоняет лодку, оказываясь на расстоянии 2 км от плота, в момент 3 снова встречается с плотом. Из подобия треугольников  $ACK$  и  $AEL$ , а также  $ACL$  и  $AEF$  получаем, что третья встреча происходит в момент 9. Далее, аналогично, катер встречает плот в моменты 27, 81, 243, 729, 2187, ... При этом к моменту седьмой встречи плот проплывает  $729 < 1000$  километров, а к моменту восьмой должен был бы проплыть  $2187 > 1000$  километров.

Ответ. 7.

### Упражнения

1. Два туриста выезжают одновременно навстречу друг другу из двух пунктов  $A$  и  $B$ . При встрече оказалось, что первый проехал на 30 км больше второго и что через 4 ч он будет в  $B$ . Вторым попадает в  $A$  через 9 ч после встречи. Найдите расстояние  $AB$  и скорости туристов.

2. Два пешехода идут навстречу друг другу: один из пункта  $A$ , другой из пункта  $B$ . Первый выходит из  $A$  на 6 ч позже, чем второй из  $B$ , и при встрече оказывается, что он прошел на 12 км меньше второго. Продолжая после встречи дальнейший путь с той же скоростью, первый приходит в  $B$  через 8 ч, а второй в  $A$  – через 9 ч. Найдите скорость каждого пешехода.

3. Бассейн наполняется первой трубой за 4 ч. Через 2 ч после открытия первой трубы открыли вторую трубу, через которую весь бассейн может наполниться за 6 ч. За сколько часов был наполнен весь бассейн?

4 (геофак МГУ, 1978). Пешеход вышел из пункта  $A$  в пункт  $B$ . Через  $3/4$  ч из  $A$  в  $B$  выехал велосипедист. Когда велосипедист прибыл в пункт  $B$ , пешеходу оставалось пройти  $3/8$  всего пути. Сколько времени потратил пешеход на весь путь, если известно, что велосипедист догнал пешехода на половине пути из пункта  $A$  в пункт  $B$  и что скорости велосипедиста и пешехода постоянны?

5 (ВМК МГУ, 1989). Вниз по реке от пристани  $A$  к пристани  $B$  отплыл плот. Вслед за ним через  $1/2$  ч от пристани  $A$  отплыла лодка, а еще через 1 ч – катер. Плот, лодка и катер двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после

отплытия катера оказалось, что к этому моменту все они преодолели одинаковую часть пути от  $A$  до  $B$ . На сколько минут раньше плота прибыл к пристани  $B$  катер, если плот прибыл к пристани  $B$  на 15 мин позже лодки?

6 (психфак МГУ, 1978). По шоссе с постоянной скоростью движется пешеход, а навстречу ему с постоянными скоростями движутся велосипедист и мотоциклист. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был на расстоянии 8 км от них. В тот момент, когда мотоциклист встретил пешехода, велосипедист отстал от мотоциклиста на 4 км. На сколько километров мотоциклист будет обгонять велосипедиста в тот момент, когда пешеход встретится с велосипедистом?

7 (ВМК МГУ, 1992). Из пункта  $A$  в пункт  $B$  вылетел самолет, через 3 ч в противоположном направлении (из  $B$  в  $A$ ) вылетел вертолет, а еще через 3 ч они поравнялись. Самолет прибыл в  $B$  в 13 ч 30 мин, а вертолет в  $A$  – в 20 ч 30 мин. Найдите время вылета самолета из  $A$ .

8 (олимпиада «Ломоносов», МГУ, 2006). Из пункта  $A$  в пункт  $B$  в 7:00 вышел пешеход, а через некоторое время из  $B$  в  $A$  выехал всадник. Пешеход пришел в  $B$  через 12 ч после выезда оттуда всадника. Всадник приехал в  $A$  в 17:00 того же дня. Скорости пешехода и всадника постоянны. Какую долю пути из  $A$  в  $B$  прошел пешеход до встречи с всадником?

9 (мехмат МГУ, 2004). Дорога проходит последовательно через пункты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Расстояние от  $B$  до  $C$  равно 12 км. Из  $A$  в  $D$  выехал с постоянной скоростью мотоциклист. Одновременно с ним из  $B$  в  $D$  отправились с постоянными скоростями пешеход и велосипедист. Когда мотоциклист догнал пешехода, велосипедист обгонял их на 6 км. В пункте  $C$  мотоциклист догнал велосипедиста и, доехав до  $D$ , сразу поехал обратно в  $A$ , встретившись с пешеходом во второй раз в  $C$ . Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ , если известно, что время от начала движения до момента повторной встречи мотоциклиста и пешехода в 4 раза больше, чем время от начала движения до того момента, когда мотоциклист впервые догнал велосипедиста.

10 (биофак, ФБИ МГУ, 2006). Из пункта  $B$  вниз по течению реки начинает движение плот, а в противоположную сторону одновременно с ним выходит катер. По пути следования катера на расстоянии 2 км от  $B$  расположен пункт  $A$ , из которого в тот же момент против течения реки начинает движение теплоход. Собственная скорость теплохода в 2 раза превышает скорость течения, собственная скорость катера в 3 раза больше скорости течения. Встретив теплоход, катер мгновенно разворачивается и следует до встречи с плотом, после чего снова разворачивается и движется в сторону теплохода до встречи с ним, затем опять к плоту и т.д. Сколько раз катер встретит теплоход за время, в течение которого теплоход преодолеет расстояние, равное 2000 км?

### Список литературы

1. А.П.Савин. Занимательные математические задачи. – М.: АСТ, 1995.
2. И.Н.Сергеев. Математика. Задачи с ответами и решениями. Учебное пособие. – М.: Бином, 2004.
3. А.И.Островский, Б.А.Кордемский. Геометрия помогает арифметике. – М.: Физматгиз, 1960.
4. И.Ф.Шарыгин. Факультативный курс по математике. Решение задач. Учебное пособие для 10 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1989.

# Равноускоренное движение по прямой

А. ЧЕРНОУЦАН

**В**СПОМНИМ ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КИНЕМАТИКИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО РАВНОУСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ.

Для описания движения точки вдоль некоторой прямой выбирают на этой прямой положительное направление и обозначают ее, например, осью  $x$ . Если движение происходит с постоянным ускорением  $a_x = \text{const}$ , то проекция скорости  $v_x$  изменяется со временем  $t$  по линейному закону

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \quad (1)$$

где  $v_{0x}$  – проекция на ось  $x$  начальной скорости, т.е. скорости в момент времени  $t = 0$ . Зависимости от времени координаты  $x$  и перемещения  $s_x = x - x_0$ , где  $x_0$  – начальная координата, имеют квадратичный характер:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad (2a)$$

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (2б)$$

Школьники, которые уже познакомились с понятием производной, могут легко проверить, что производная от скорости по времени равна ускорению, а производная от координаты или перемещения по времени равна скорости. Отметим, что для записи формулы (2a) необходимо выбрать не только положительное направление, но и положение начала координат, а для формул (1) и (2б) достаточно указать лишь положительное направление оси.

Скажем несколько слов об используемых обозначениях. Индекс  $x$  (или  $y, z$ ) обозначает проекцию на эту ось соответствующего вектора. При движении по прямой любой описывающий движение вектор –  $\vec{v}, \vec{v}_0, \vec{s}, \vec{a}$  – может иметь только два направления. Поэтому, например,  $v_x = v$ , если вектор  $\vec{v}$  смотрит в положительном направлении оси  $x$ , но  $v_x = -v$ , если  $\vec{v}$  смотрит в отрицательном направлении. Буква без индекса  $x$ , например  $v, a, s$ , обозначает модуль соответствующего вектора.

В принципе, основных формул (1), (2) кинематики равноускоренного движения достаточно для решения любых задач. Можно, однако, существенно сократить расчеты, если научиться пользоваться двумя дополнительными кинематическими формулами, связывающими другие наборы переменных. Если выразить время  $t$  из выражения (1) и подставить в выражение (2б), то получим формулу, не содержащую времени, но связывающую между собой две переменные величины  $v_x$  и  $s_x$ :

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x s_x. \quad (3)$$

Если же из уравнения (1) выразить  $a_x$ , точнее  $a_x t$ , и подставить в уравнение (2б), то получим формулу

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t. \quad (4)$$

Эта формула может быть прочитана так: средняя скорость

равноускоренного движения на любом интервале времени равна полусумме начальной и конечной скоростей. Кроме того, она имеет наглядный графический смысл, отражающий следующее общее утверждение: перемещение  $s_x$  на любом интервале времени равно площади под графиком  $v_x(t)$ . В случае равноускоренного движения (рис.1) нужно вычислить площадь трапеции с основаниями  $v_{0x}$  и  $v_x$  и высотой  $t$ , что соответствует формуле (4). Средняя скорость на этом графике равна средней линии трапеции, т.е. скорости в середине временного интервала.

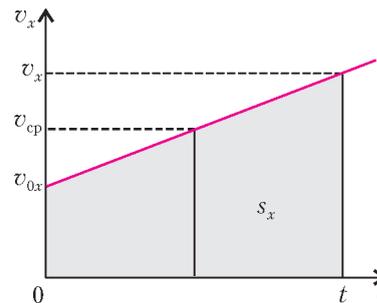


Рис. 1

Еще одно замечание. Каждая из формул (1)–(4) содержит четыре из пяти величин  $t, s_x, v_{0x}, v_x, a_x$ . Если надо выбрать формулу для конкретной ситуации, следует смотреть не на то, какие величины должны присутствовать в формуле, а на то, какая величина может в ней отсутствовать. Действительно, формула (1) не содержит только  $s_x$ , формула (2б) не содержит только  $v_x$ , формулу (3) можно назвать формулой «без  $t$ », а формулу (4) – формулой «без  $a$ ».

Рассмотрим несколько примеров.  
**Задача 1.** Автомобиль, который двигался со скоростью  $v_0 = 8 \text{ м/с}$ , начинает торможение с ускорением  $a = 2 \text{ м/с}^2$ . Какое расстояние  $s$  проедет автомобиль к тому моменту, когда его скорость уменьшится вдвое?

**Решение.** Для записи уравнений необходимо выбрать положительное направление оси. Выберем его в направлении движения автомобиля (рис.2); тогда  $v_{0x} = v_0, v_x = v, s_x = s$ , но  $a_x = -a$  (торможение). Убедимся сначала, что задачу можно

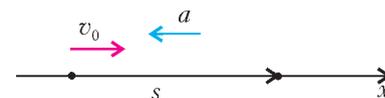


Рис. 2

решить с помощью основных формул (1), (2). Для данной задачи они принимают вид

$$\frac{v_0}{2} = v_0 - at,$$

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2}.$$

Выражая  $t$  из первого уравнения и подставляя во второе, получим

$$s = \frac{3}{8} \frac{v_0^2}{a} = 12 \text{ м}.$$

Однако можно обойтись и одной формулой. Заметим, что время не входит ни в данные, ни в вопрос задачи, и воспользуемся формулой (3) («без  $t$ »):

$$\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - v_0^2 = 2(-a)s,$$

откуда сразу получим приведенный выше ответ.

**Задача 2** (ЕГЭ 2009). За время  $t = 2 \text{ с}$  прямолинейного движения с постоянным ускорением тело прошло путь  $s = 20 \text{ м}$ , не меняя направления движения и уменьшив свою скорость в 3 раза. Чему равна начальная скорость тела на этом интервале?

**Решение.** Попробуйте сначала решить эту задачу с помощью основных формул (1), (2); при этом не забудьте, что

$a_x = -a$ . Мы же сразу воспользуемся формулой (4) («без  $a$ »):

$$s = \frac{v_0 + (v_0/3)t}{2}, \text{ откуда } v_0 = \frac{3s}{2t} = 15 \text{ м/с.}$$

Иногда условие задачи сформулировано так, что одним уравнением обойтись не удастся. В этом случае можно выбрать любые два уравнения из четырех.

**Задача 3.** Автомобиль разгоняется с постоянным ускорением  $a = 2 \text{ м/с}^2$ . Мимо наблюдателя он проезжает со скоростью  $v = 20 \text{ м/с}$ . На каком расстоянии  $s$  от наблюдателя автомобиль находился за  $t = 6 \text{ с}$  до этого момента?

**Решение.** Среди параметров условия отсутствует  $v_0$ , а среди четырех стандартных формул нет формулы «без  $v_0$ ». Запишем первые два уравнения:

$$v = v_0 + at, \\ s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Выразив  $v_0$  из первого уравнения и подставив во второе, найдем

$$s = vt - \frac{at^2}{2} = 84 \text{ м.}$$

Вместо формул (1), (26) можно использовать формулы (1), (4). Полученная нами в ответе формула как раз и есть недостающая формула «без  $v_0$ ». Она имеет такой же вид, как формула (26) для случая торможения. Этому есть простое объяснение, опирающееся на прием, который называют «обращением времени». Если записать движение на видеореагере, а затем пустить запись в обратном направлении, то тело за то же время пройдет то же расстояние, но с начальной скоростью  $v'_0 = v$ , конечной скоростью  $v' = v_0$  и с ускорением  $a'_x = -a_x = -a$ . Задача сводится к движению с известными  $v_0$ ,  $a$  и  $t$  и решается одной формулой (26).

Приведем еще один пример задачи, где одной формулой обойтись не удастся.

**Задача 4** (ЕГЭ 2010). Материальная точка, двигаясь равноускоренно по прямой, за время  $t$  увеличила скорость в 3 раза, пройдя путь  $s = 20 \text{ м}$ . Найдите  $t$ , если ускорение точки  $a = 5 \text{ м/с}^2$ .

**Решение.** В этом случае нельзя решить задачу одной формулой, так как каждая формула связывает между собой четыре величины из пяти, а в условии задачи присутствуют все пять. Запишем сначала уравнение (3):

$$(3v_0)^2 - v_0^2 = 2as$$

и выразим из него  $v_0$ :

$$v_0 = \sqrt{\frac{as}{4}},$$

после чего найдем  $t$  из формулы (1) (или из формулы (4)):

$$3v_0 = v_0 + at, \quad t = \frac{2v_0}{a} = \sqrt{\frac{s}{a}} = 2 \text{ с.}$$

Особенно выгодно использовать одну формулу вместо двух в задачах, где сравниваются разные случаи или разные этапы движения. В таких задачах сокращение кинематических расчетов оказывается еще существеннее.

**Задача 5** (ЕГЭ 2010). На последнем километре тормозного пути скорость поезда уменьшилась на  $10 \text{ м/с}$ . Определите скорость в начале торможения, если общий тормозной путь поезда составил  $4 \text{ км}$ , а торможение было равнозамедленным.

**Решение.** Обозначим длину последнего участка через  $s_{\text{п}}$  ( $s_{\text{п}} = 1 \text{ км}$ ), скорость в конце этого участка равна нулю ( $v_{\text{п}} = 0$ ), а в начале скорость равна  $v_{0\text{п}} = 10 \text{ м/с}$  (рис.3). Полный тормозной путь обозначим через  $s$  ( $s = 4 \text{ км}$ ), а начальную скорость — через  $v_0$ . Поскольку время в условии не упоминается, запишем формулу (3) («без  $t$ ») дважды — для всего тормозного пути и для последнего участка:

$$0 - v_0^2 = -2as, \quad 0 - v_{0\text{п}}^2 = -2as_{\text{п}}.$$

Исключив  $a$ , получим

$$v_0 = v_{0\text{п}} \sqrt{\frac{s}{s_{\text{п}}}} = 20 \text{ м/с.}$$

В следующей задаче надо последовательно рассмотреть два этапа единого равноускоренного движения.

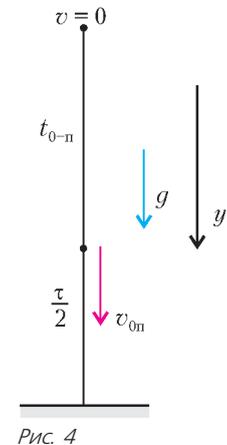
**Задача 6** (ЕГЭ 2009). Тело, свободно падающее с некоторой высоты, первый участок пути проходит за время  $\tau = 1 \text{ с}$ , а такой же последний участок — за время  $\tau/2$ . Найдите полное время падения  $t$ , если начальная скорость равна нулю.

**Решение.** Длина участка, пройденного телом за последние полсекунды, такая же, как и за первую секунду:

$$s_{\text{п}} = s_1 = \frac{g\tau^2}{2}.$$

Скорость в начале последнего участка (рис.4) найдем из формулы (26):

$$s_{\text{п}} = v_{0\text{п}} \frac{\tau}{2} + \frac{g(\tau/2)^2}{2}, \\ v_{0\text{п}} = \frac{g\tau^2/2 - g(\tau/2)^2/2}{\tau/2} = \frac{3}{4} g\tau.$$



Поскольку эта скорость является конечной скоростью предыдущего движения, то с помощью формулы (1) можно найти время от начала падения до последнего участка:

$$v_{0\text{п}} = gt_{0-п}, \quad t_{0-п} = \frac{v_{0\text{п}}}{g} = \frac{3}{4} \tau.$$

Это время меньше  $\tau$ , следовательно, первый и последний участки пересекаются. Полное время падения равно

$$t = \frac{3}{4} \tau + \frac{\tau}{2} = \frac{5}{4} \tau = 1,25 \text{ с.}$$

**Задача 7.** Определите, на сколько путь, пройденный свободно падающим телом в десятую секунду, больше пути, пройденного телом в предыдущую секунду. Начальная скорость тела равна нулю.

**Решение.** Лобовой способ решения состоит в том, чтобы определить путь за каждую из данных секунд, после чего найти разность между ними. Путь за любой интервал времени между моментами  $t_1$  и  $t_2$  можно найти как разность путей, пройденных к концу интервала и к началу интервала:

$$s_{8-9} = s_9 - s_8 = \frac{gt_9^2}{2} - \frac{gt_8^2}{2} = 405 \text{ м} - 320 \text{ м} = 85 \text{ м,}$$

$$s_{9-10} = s_{10} - s_9 = 95 \text{ м.}$$

Отсюда получаем ответ:

$$\Delta s = s_{9-10} - s_{8-9} = 10 \text{ м.}$$

А можно использовать среднюю скорость:

$$v_8 = gt_8, \quad v_9 = gt_9, \quad s_{8-9} = \frac{v_8 + v_9}{2} (t_9 - t_8) = 85 \text{ м}$$

и т.д. Этот способ позволяет увидеть, что такой же ответ  $\Delta s = g\Delta t^2 = 10 \text{ м}$  будет верен для любых двух последовательных секундных интервалов  $\Delta t = 1 \text{ с}$ . Действительно, средняя скорость на каждом интервале равна скорости в его середине, а середина последующего интервала наступает на  $\Delta t$  позже, чем середина предыдущего. Следовательно, вторая средняя скорость на  $g\Delta t$  больше, чем первая.

Получается, что решение через средние скорости позволяет отвлечься от начальной скорости. Рассмотрим еще пример.

**Задача 8.** За пятую секунду прямолинейного движения с постоянным ускорением тело проходит путь  $s = 5 \text{ м}$  и останавливается. Какой путь проходит тело за вторую секунду этого движения?

**Решение.** Решение «в лоб» требует записать данные задачи в виде системы уравнений:

$$0 = v_0 - at_5,$$

$$s_{4-5} = s = \left( v_0 t_5 - \frac{at_5^2}{2} \right) - \left( v_0 t_4 - \frac{at_4^2}{2} \right),$$

из которой определить  $a$  и  $v_0$ , после чего найти путь за вторую секунду:

$$s_{1-2} = \left( v_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2} \right) - \left( v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2} \right).$$

Видно, что при наличии неизвестной начальной скорости лобовой способ становится очень трудоемким.

Рассмотрим отдельно последнюю секунду и найдем скорость в начале этой секунды:

$$s_{4-5} = s = \frac{v_4 + 0}{2} \Delta t, \quad v_4 = \frac{2s}{\Delta t} = 10 \text{ м/с}$$

и ускорение:

$$0 = v_4 - a\Delta t, \quad a = \frac{v_4}{\Delta t} = 10 \text{ м/с}^2.$$

Поскольку за каждую секунду скорость уменьшается на  $a\Delta t = 10 \text{ м/с}$ , то находим  $v_3 = 20 \text{ м/с}$ ,  $v_2 = 30 \text{ м/с}$ ,  $v_1 = 40 \text{ м/с}$ , и

$$s_{1-2} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t = 35 \text{ м}.$$

Еще один способ – «обращение времени» (см. задачу 3). Обращенное движение представляет собой равноускоренное движение с нулевой начальной скоростью, при этом известен путь за первую секунду, а надо найти путь за четвертую. Такая задача гораздо проще.

Следующая задача использует то обстоятельство, что средняя скорость на каждом интервале равноускоренного движения равна скорости тела в середине этого интервала.

**Задача 9.** Двигаясь прямолинейно и равноускоренно, тело за последовательные промежутки времени  $t_1 = 4 \text{ с}$  и  $t_2 = 6 \text{ с}$  проходит в одном направлении отрезки пути  $s_1 = 20 \text{ м}$  и  $s_2 = 42 \text{ м}$ . Найдите ускорение тела.

**Решение.** Средняя скорость на первом интервале  $v_{cp1} = s_1/t_1 = 5 \text{ м/с}$  есть скорость в середине первого интервала, а средняя скорость на втором интервале  $v_{cp2} = s_2/t_2 = 7 \text{ м/с}$  есть скорость в середине второго интервала. Промежуток времени между серединами интервалов равен  $\Delta t = t_1/2 + t_2/2 = 5 \text{ с}$ . Соответственно, ускорение равно

$$a = \frac{v_{cp2} - v_{cp1}}{\Delta t} = 0,4 \text{ м/с}^2.$$

Рассмотрим теперь задачи, где равноускоренное движение происходит с разворотом.

**Задача 10.** Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0 = 50 \text{ м/с}$ . Через сколько секунд его скорость будет равна  $v = 30 \text{ м/с}$  и направлена вертикально вниз?

**Решение.** Запишем формулу (1) для зависимости скорости от времени (рис.5):

$$v_y = v_0 - gt.$$

Важно понимать, что формулы (1)–(4) действуют все время равноускоренного движения, нет необходимости разбивать его на этап замедленного движения до остановки и ускоренного падения от верхней точки. Поскольку в рассматриваемый момент скорость направлена вниз, против положительного направления оси, надо подставить  $v_y = -v$ . Получаем

$$t = \frac{v_0 + v}{g} = 8 \text{ с}.$$

Заметим, что полученный ответ как раз соответствует движению вверх до остановки за время  $t_1 = v_0/g = 5 \text{ с}$  ( $v_0 - gt_1 = 0$ ) и обратному падению за время  $t_2 = v/g = 3 \text{ с}$  ( $v = gt_2$ , ось направлена вниз). Конечно, не возбраняется делать задачи с разворотом поэтапно, если так, исследуя движение более детально, вы чувствуете себя увереннее. Однако в некоторых случаях поэтапное решение оказывается очень неудобным.

**Задача 11.** Тело, брошенное вертикально вверх из точки, находящейся над землей на высоте  $h_0 = 8 \text{ м}$ , падает на землю через время  $t = 4 \text{ с}$  после броска. С какой скоростью брошено тело?

**Решение.** Запишем зависимость (26) перемещения  $s_y$  от времени (рис.6):

$$s_y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Поскольку эта формула действует все время полета, рассмотрим сразу момент падения на землю, не разбивая движение на две части. Условие падения записывается через перемещение так:

$$s_y = -h_0 \quad (\text{не } s_y = h_0!).$$

Приходим к уравнению

$$-h_0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

откуда находим

$$v_0 = \frac{gt}{2} - \frac{h_0}{t} = 18 \text{ м/с}.$$

Наибольшую трудность вызывает условие падения, в котором часто забывают знак «-». Этой трудности удастся избежать в координатном подходе, т.е. с использованием формулы (2а). Выбираем начало координат на поверхности земли, тогда зависимость координаты от времени принимает следующий вид:

$$y = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

а условие падения становится тривиальным:

$$y = 0.$$

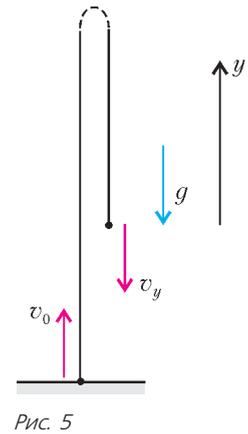


Рис. 5

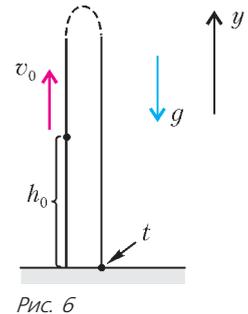


Рис. 6

Если бы начальная скорость была дана, а спрашивалось, например, время полета или скорость падения, то решение через разбиение на два этапа (вверх и вниз) было бы достаточно простым. В данной задаче такое решение встречается с большими сложностями. Впрочем, расчет с разбиением можно использовать для проверки ответа.

Следующая задача допускает различные подходы, выбор между которыми зависит от данных условия (что дано и что надо найти).

**Задача 12.** *Камень, брошенный вертикально вверх, дважды был на одной и той же высоте — спустя  $t_1 = 0,8$  с и  $t_2 = 1,5$  с после начала движения. Чему равна эта высота?*

**Решение.** Решение «в лоб» состоит в составлении системы уравнений:

$$h = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2},$$

$$h = v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}.$$

Обычно эту систему решают «в числах» и находят ответ:

$$h = 6 \text{ м.}$$

Если, однако, решить ее «в буквах», то получим

$$v_0 = \frac{g(t_1 + t_2)}{2}, \quad h = \frac{gt_1 t_2}{2}.$$

Интересно, что эти ответы есть не что иное, как первая и вторая теоремы Виета для уравнения

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad \text{или} \quad t^2 - \frac{2v_0}{g}t + \frac{2h}{g} = 0,$$

корнями которого как раз являются моменты  $t_1$  и  $t_2$ .

Можно также построить решение на симметрии подъема и падения. Ясно, что верхняя точка находится посередине между рассматриваемыми моментами. Значит, время подъема от высоты  $h$  до верхней точки и время обратного падения равны  $(t_2 - t_1)/2$ , а время падения от верхней точки до земли равно  $(t_2 + t_1)/2$ . Отсюда находим

$$h = \frac{g(t_2 + t_1)^2}{8} - \frac{g(t_2 - t_1)^2}{8} = \frac{gt_1 t_2}{2}.$$

Разбиение на два этапа становится неизбежным, если требуется рассчитать пройденный путь. Формула (26) позволяет вычислить перемещение в любой момент движения, но аналогичной формулы для пути не существует.

**Задача 13.** *Из точки, находящейся на высоте  $h_0 = 10$  м над поверхностью земли, бросают вертикально вверх камень со скоростью  $v_0 = 10$  м/с. Какой путь пройдет камень за время  $t = 3$  с?*

**Решение.** Поскольку разворот произойдет через время  $t_1 = v_0/g = 1$  с ( $0 = v_0 - gt_1$ ), путь надо искать как сумму путей, пройденных камнем при подъеме и при падении:

$$l = l_1 + l_2 = |s_{1y}| + |s_{2y}| = |y_1 - y_0| + |y - y_1|.$$

Если решать через перемещения, то перемещение на каждом этапе ищем отдельно с помощью наиболее удобной формулы:

$$0 - v_0^2 = -2gs_1, \quad s_2 = \frac{gt_2^2}{2} \quad (t_2 = t - t_1)$$

(в первом случае ось направлена вверх, во втором — вниз). Получаем  $s_1 = 5$  м,  $s_2 = 20$  м. Поскольку  $s_2$  больше, чем  $h_0 + s_1$ , то тело раньше упадет на землю, т.е.  $l_2 = h_0 + s_1 =$

$= 15$  м. Окончательно находим

$$l = l_1 + l_2 = s_1 + (h_0 + s_1) = 20 \text{ м.}$$

Если решать через координаты, то надо использовать одну формулу

$$y = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

а если  $y$  получится отрицательным, то заменить на  $y = 0$ .

Разбиение на этапы является неизбежным в тех задачах, где меняется характер движения. При этом начальные координата и скорость каждого последующего этапа равны конечным координате и скорости предыдущего этапа.

**Задача 14.** *Мальчик, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, съехал на санках с горы длиной  $s_1 = 50$  м за  $t_1 = 10$  с, а затем проехал по горизонтальному участку еще  $s_2 = 25$  м до остановки. Найдите величину ускорения мальчика на втором участке движения.*

**Решение.** Для этапа разгона применим формулу (4):

$$s_1 = \frac{0 + v_1}{2} t_1,$$

откуда найдем конечную скорость первого этапа  $v_1$ , которая равна начальной скорости второго этапа. Для торможения удобно применить формулу (3):

$$0 - v_1^2 = -2a_2 s_2.$$

Отсюда получаем

$$a_2 = 2 \text{ м/с}^2.$$

В следующей задаче движение состоит из трех этапов, два из которых происходят с ускорением.

**Задача 15.** *Расстояние между двумя светофорами автомашина прошла на первом участке, равном  $0,1$  всей его длины, равноускоренно и набрала скорость  $v = 20$  м/с. Затем она шла равномерно с этой скоростью, а на последнем участке, равном по длине первому, тормозила с постоянным ускорением. Какова средняя скорость (в км/ч) автомашины?*

**Решение.** На каждом из этапов применим формулу (4) («без  $a$ »):

$$0,1s = \frac{0 + v}{2} t_1, \quad 0,8s = vt_2, \quad 0,1s = \frac{v + 0}{2} t_3.$$

Получаем

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{0,2s}{v} + \frac{0,8s}{v} + \frac{0,2s}{v} = \frac{1,2s}{v},$$

откуда находим

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = \frac{v}{1,2} = 60 \text{ км/ч.}$$

Вернемся к случаю, когда движение состоит из двух этапов, но второй этап происходит с разворотом. Тут весьма кстати оказывается умение компактно решать такие задачи (см. задачу 11).

**Задача 16.** *В течение  $t_1 = 20$  с ракета поднимается с постоянным ускорением  $a_1 = 0,8g$ , после чего двигатели ракеты выключаются. Через какое время после этого ракета упадет на землю?*

**Решение.** К концу первого этапа (рис. 7) ракета пройдет расстояние

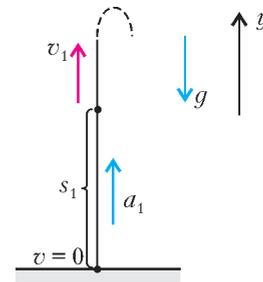


Рис. 7

$s_1 = 0,8gt_1^2/2$  и наберет скорость  $v_1 = 0,8gt_1$ . Для второго этапа выберем ось, направленную вверх, с началом координат на поверхности земли. Тогда условие падения принимает вид  $y = 0$ , при этом начальная координата и начальная скорость равны  $s_1$  и  $v_1$  соответственно. Из формулы (2а) получаем уравнение

$$0 = s_1 + v_1t - \frac{gt^2}{2}, \text{ или } 0 = \frac{0,8gt_1^2}{2} + 0,8gt_1t - \frac{gt^2}{2}.$$

Положительный корень этого уравнения равен

$$t = 2t_1 = 40 \text{ с.}$$

В следующих задачах рассматривается движение двух тел и исследуется момент их встречи. В таких задачах удобно применять координатную запись (2а) для каждого из тел на единой координатной оси с общим началом координат. Тогда условие встречи принимает вид условия равенства координат двух тел.

**Задача 17.** Когда пассажиру осталось дойти до двери вагона расстояние  $s = 15$  м, поезд тронулся с места и стал разгоняться с ускорением  $a = 0,5$  м/с<sup>2</sup>. Пассажир побежал со скоростью  $v = 4$  м/с. Через какое время он достигнет двери вагона?

**Решение.** Выберем начало координат в точке, где находился пассажир в начальный момент (рис.8). Зависимости

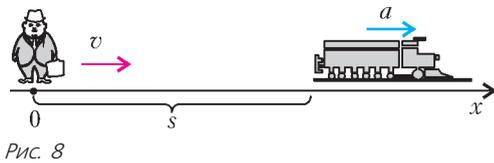


Рис. 8

координат пассажира и двери вагона от времени имеют вид

$$x_1 = vt, \quad x_2 = s + \frac{at^2}{2}.$$

Условие встречи  $x_1 = x_2$  приводит к квадратному уравнению

$$\frac{at^2}{2} - vt + s = 0.$$

Непривычным является то обстоятельство, что при заданных числовых значениях уравнение имеет два положительных корня:  $t_1 = 6$  с и  $t_2 = 10$  с. Какой же из корней выбрать? Дело в том, что когда пассажир в первый раз догонит дверь (в момент времени  $t_1$ ), его скорость будет больше, чем скорость поезда в этот момент, и если он продолжит свой бег, то опередит желанную дверь. Конечно потом, двигаясь с ускорением, дверь догонит пассажира (в момент  $t_2$ ). Исходя из нормального поведения человека, надо выбрать, конечно же, первый корень.

Пусть теперь движение тел до встречи продолжается разное время.

**Задача 18** (ЕГЭ 2008). Мимо остановки по прямой улице проезжает грузовик со скоростью  $v = 10$  м/с. Через  $\Delta t = 5$  с от остановки вдогонку грузовику отъезжает мотоциклист, движущийся с ускорением  $a = 3$  м/с<sup>2</sup>. На каком расстоянии  $s$  от остановки мотоциклист догонит грузовик?

**Решение.** Примем положение остановки за начало координат. Обозначим через  $t$  время движения мотоциклиста, тогда зависимость его координаты от времени будет иметь вид

$$x_1 = \frac{at^2}{2},$$

а зависимость координаты грузовика от времени –

$$x_2 = v(t + \Delta t).$$

Условие встречи  $x_1 = x_2$  приводит к уравнению

$$\frac{at^2}{2} - vt - v\Delta t = 0,$$

положительный корень которого равен  $t = 10$  с. Подставляя это значение в выражение для  $x_1$  или  $x_2$ , получим

$$s = 150 \text{ м.}$$

Условие встречи имеет такой же вид и в том случае, когда движение одного из тел происходит с разворотом.

В следующей задаче исследуется условие, необходимое для того, чтобы встреча состоялась.

**Задача 19.** Два тела начинают одновременно двигаться по прямой навстречу друг другу с начальными скоростями  $v_{01} = 10$  м/с и  $v_{02} = 20$  м/с и с постоянными ускорениями  $a_1 = 2$  м/с<sup>2</sup> и  $a_2 = 1$  м/с<sup>2</sup>, направленными противоположно соответствующим начальным скоростям. Определите, при каком максимальном начальном расстоянии  $s$  между телами они встретятся в процессе движения.

**Решение.** Может показаться, что достаточно найти расстояния  $s_1$  и  $s_2$ , которые пройдут тела до разворота ( $0 - v_{01}^2 = -2a_1s_1$  и т.п.), и затем сложить эти расстояния:  $s = v_{01}^2/a_1 + v_{02}^2/a_2$ . Однако полученный таким образом ответ оказывается завышенным, поскольку тела достигают точек разворота не одновременно. Направим координатную ось от первого тела в сторону второго, запишем координаты обоих тел в момент времени  $t$ :

$$x_1 = v_{01}t - \frac{a_1t^2}{2}, \quad x_2 = s - v_{02}t + \frac{a_2t^2}{2}$$

и условие встречи  $x_1 = x_2$ :

$$\frac{(a_2 + a_1)t^2}{2} - (v_{01} + v_{02})t + s = 0.$$

Максимальному  $s$  соответствует ситуация, когда это уравнение имеет один корень. При большем  $s$  корней не будет, т.е. встреча не состоится, при меньшем  $s$  корней будет два, т.е. тела проедут мимо друг друга, а затем встретятся еще раз (см. задачу 17). Приравнивая дискриминант к нулю, получим

$$s = \frac{(v_{01} + v_{02})^2}{2(a_1 + a_2)} = 150 \text{ м.}$$

Другой подход к такой задаче: поскольку тела должны встретиться и сразу разойтись, то их скорости в момент встречи должны быть одинаковы. Это дает еще одно уравнение, из которого можно найти время и подставить в условие встречи.

И еще один важный метод: если перейти в систему отсчета первого тела, то второе будет двигаться с начальной скоростью  $v_{01} + v_{02}$  и ускорением  $a_1 + a_2$ , направленным против начальной скорости. Ответ соответствует расстоянию, пройденному этим телом до разворота.

В последней задаче мы вспомним основные методы построения графиков равноускоренного движения.

**Задача 20.** По графику зависимости скорости точки от времени (рис.9) постройте графики зависимости от времени ускорения, перемещения и пути.

**Решение.** График ускорения (рис.10) не требует особых пояснений: на каждом участке величину ускорения находим

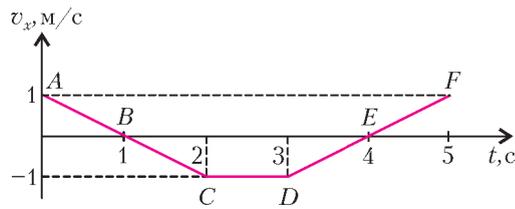


Рис. 9

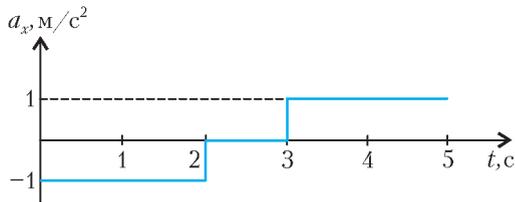


Рис. 10

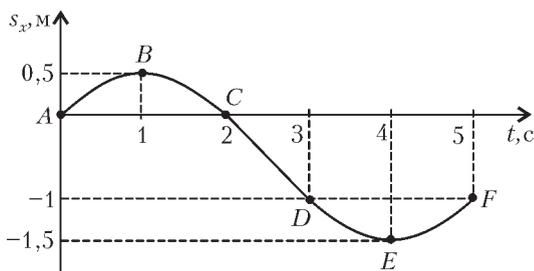


Рис. 11

как  $a_x = \Delta v_x / \Delta t$  (тангенс угла наклона графика скорости), т.е. с помощью формулы (1).

Рассмотрим подробнее графики перемещения и пути.

График перемещения (рис.11) начинается из начала координат (начальное перемещение равно нулю). На участке AC график представляет собой параболу ветвями вниз, на участке CD – прямую, на участке DF – параболу ветвями вверх. Вершины парабол находятся в точках B и E, в которых скорость равна нулю. Положение точек B, D и E находится с помощью правила площадей: координата точки B равна площади под графиком скорости на участке AB, координата точки D определяется площадью прямоугольника на участке CD, координата точки E – площадью треугольника на участке DE. Правило площадей действует на любом участке. Следует обратить внимание на то, что состыковка участков графика в точках C и D должна быть гладкой, без уголков, поскольку скорость в этих точках не испытывает скачка.

График пути (рис.12) строится, исходя из графика перемещения: там, где перемещение возрастает (участки AB, EF), график пути повторяет ход графика скорости, а на

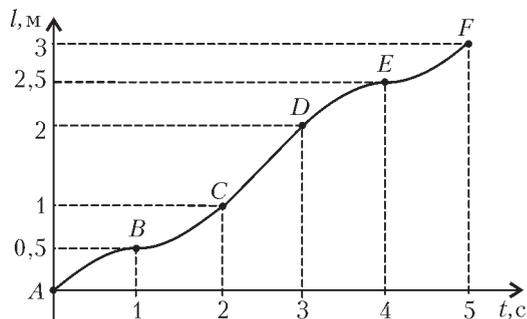


Рис. 12

участках, где перемещение убывает, график пути является отражением графика перемещения.

### Упражнения

1. Торможение автомобиля до полной остановки заняло время 4 с и происходило с постоянным ускорением  $4 \text{ м/с}^2$ . Найдите тормозной путь.

2. От движущегося поезда отцепляют последний вагон. Поезд продолжает движение с той же скоростью. Считая, что вагон движется с постоянным ускорением, найдите, во сколько раз путь, пройденный вагоном до его остановки, меньше пути, пройденного поездом к этому моменту.

3. За одну секунду движения тело прошло путь 10 м, при этом его скорость, не меняя направления, увеличилась в 4 раза по сравнению с первоначальной. Каково было ускорение тела?

4. Скорость тела, движущегося с постоянным ускорением, в начале некоторого участка равна  $7 \text{ м/с}$ , а в конце направлена в ту же сторону и равна  $1 \text{ м/с}$ . Чему равна его скорость в середине этого участка?

5. С какой высоты падает тело без начальной скорости, если путь, пройденный им за последнюю секунду движения, в пять раз больше пути, пройденного за первую секунду?

6. Автомобиль, двигаясь равнозамедленно, за последовательные промежутки времени в 3 с и 2 с прошел отрезки AB и BC в 51 м и 24 м соответственно. Какой путь пройдет автомобиль от точки C до остановки?

7. Тело бросили вертикально вверх. Наблюдатель заметил, что на высоте 75 м тело побывало дважды, с интервалом времени 2 с. Найдите начальную скорость тела.

8. Шарик, пущенный снизу вверх по наклонной плоскости, движется с постоянным ускорением, направленным противоположно начальной скорости. На расстоянии 50 см от начальной точки движения шарик побывал дважды: через 1 с и 2 с. Найдите начальную скорость шарика и его ускорение.

9. Спортсменка пробежала расстояние 100 м за время 12 с, причем на разгон она потратила 4 с, а остальное время бежала равномерно. Найдите скорость спортсменки на участке равномерного движения.

10. Двигаясь от стоянки равноускоренно, автомобиль за 10 с достигает скорости  $20 \text{ м/с}$ . Следующие 5 с он движется равномерно, а затем останавливается в течение 5 с, двигаясь с постоянным ускорением. Найдите путь автомобиля за все время движения.

11. Когда пассажиру осталось дойти до двери вагона 25 м, поезд тронулся с места и стал разгоняться с ускорением  $0,5 \text{ м/с}^2$ . Пассажир побежал с постоянной скоростью. При какой минимальной скорости он догонит свой вагон?

12. Скоростной лифт опускается с ускорением  $5 \text{ м/с}^2$  относительно земли. В некоторый момент времени с потолка лифта начинает падать болт. Высота лифта 2,5 м. Определите время падения болта.

13. По графику зависимости скорости точки от времени (рис.13) постройте графики зависимости от времени ускорения, перемещения и пути.

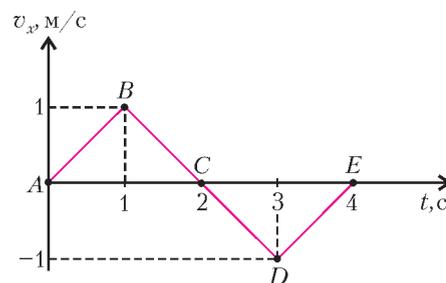


Рис. 13

## XXXII Турнир городов

## ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2010 год)

## Базовый вариант

8–9 классы

1 (4)<sup>1</sup>. В пифагоровой таблице умножения выделили прямоугольную рамку толщиной в одну клетку, причем каждая сторона рамки состоит из нечетного числа клеток. Клетки рамки поочередно раскрасили в два цвета – черный и белый. Докажите, что сумма чисел в черных клетках равна сумме чисел в белых клетках.

(Пифагорова таблица умножения – это клетчатая таблица, в которой на пересечении  $m$ -й строки и  $n$ -го столбца стоит число  $mn$  (для любых натуральных  $m$  и  $n$ ).)

С.Прика

2 (4). Равнобокая трапеция описана около окружности. Докажите, что биссектриса тупого угла этой трапеции делит ее площадь пополам.

Р.Гордин

3 (4). На шахматной доске  $8 \times 8$  стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Его прокатали по доске, перекатывая через ребра, так что кубик побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что одна из его граней ни разу не лежала на доске?

А.Шаповалов

4 (4). В некоторой школе более 90% учеников знают английский и немецкий языки и более 90% учеников знают английский и французский языки. Докажите, что среди учеников, знающих немецкий и французский языки, более 90% знают английский язык.

Фольклор, предложил А.Шень

5 (4). Концы  $N$  хорд разделили окружность на  $2N$  дуг единичной длины. Известно, что каждая из хорд делит окружность на две дуги четной длины. Докажите, что число  $N$  четно.

В.Произволов

10–11 классы

1. Банкомат обменивает монеты: дублоны на пистолы и наоборот. Пистоль стоит  $s$  дублонов, а дублон –  $1/s$  пистолей, где  $s$  – не обязательно целое. В банкомат можно вбросить любое число монет одного вида, после чего он выдаст в обмен монеты другого вида, округляя результат до ближайшего целого числа (если ближайших чисел два, выбирается большее).

а) (2) Может ли так быть, что, обменяв сколько-то дублонов на пистолы, а затем обменяв полученные пистолы на дублоны, мы получим больше дублонов, чем было вначале?

б) (3) Если да, то может ли случиться, что полученное число дублонов еще увеличится, если проделать с ними такую же операцию?

Л.Стужас

<sup>1</sup> В скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.

2. Диагонали выпуклого четырехугольника  $ABCD$  перпендикулярны и пересекаются в точке  $O$ . Известно, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $AOB$  и  $COD$ , равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $BOC$  и  $DOA$ . Докажите, что:

- а) (2) четырехугольник  $ABCD$  – описанный;  
б) (3) четырехугольник  $ABCD$  симметричен относительно одной из своих диагоналей.

П.Кожевников

3 (5). См. задачу M2206, а) «Задачника «Кванта».

4 (5). См. задачу M2207 «Задачника «Кванта».

5 (5). 55 боксеров участвовали в турнире по системе «проигравший выбывает». Бои шли последовательно. Известно, что у участников каждого боя число предыдущих побед отличалось не более чем на 1. Какое наибольшее число боев мог провести победитель турнира?

А.Шаповалов

## Сложный вариант

8–9 классы

1 (4). На плоскости дана прямая. С помощью пятака постройте две точки какой-нибудь прямой, перпендикулярной данной. Разрешаются такие операции: отметить точку, приложить пятак к ней и обвести его; отметить две точки (на расстоянии меньше диаметра пятак), приложить пятак к ним и обвести его. Нет возможности прикладывать пятак к прямой так, чтобы она его касалась.

Г.Фельдман

2 (5). Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении  $n:(n+1)$ , где  $n$  – любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он?

Б.Френкин

3 (8). На кольцевом треке 10 велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня любые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее 25 встреч.

Б.Френкин

4 (8). Клетчатый прямоугольник разбит на двуклеточные домино. В каждом домино провели одну из двух диагоналей. Оказалось, что никакие диагонали не имеют общих концов. Докажите, что ровно два из четырех углов прямоугольника являются концами диагоналей.

А.Шаповалов

5 (8). Имеется пятиугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем

сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2.

*Г. Гальперин*

**6 (8).** В остроугольном треугольнике  $ABC$  на высоте  $BH$  выбрана произвольная точка  $P$ . Точки  $A'$  и  $C'$  – середины сторон  $BC$  и  $AB$  соответственно. Перпендикуляр из  $A'$  на  $CP$  пересекается с перпендикуляром из  $C'$  на  $AP$  в точке  $K$ . Докажите, что точка  $K$  равноудалена от точек  $A$  и  $C$ .

*Ф. Ивлев*

**7 (12).** За круглым столом заседают  $N$  рыцарей. Каждое утро чародей Мерлин сажает их в другом порядке. Начиная со второго дня Мерлин разрешил рыцарям делать в течение дня сколько угодно пересадок такого вида: два сидящих рядом рыцаря меняются местами, если только они не были соседями в первый день. Рыцари стараются сесть в том же порядке, что и в какой-нибудь из предыдущих дней: тогда заседания прекратятся. Какое наибольшее число дней Мерлин гарантированно может проводить заседания? (Рассадики, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми. Мерлин за столом не сидит.)

*М. Прасолов*

*10–11 классы*

**1.** В некоей стране 100 городов (города считайте точками на плоскости). В справочнике для каждой пары городов имеется запись, каково расстояние между ними (всего 4950 записей).

а) (2) Одна запись стерлась. Всегда ли можно однозначно восстановить ее по остальным?

б) (3) Пусть стерлись  $k$  записей, и известно, что в этой стране никакие три города не лежат на одной прямой. При каком наибольшем  $k$  всегда можно однозначно восстановить стершиеся записи?

*И. Богданов*

**2 (6).** См. задачу M2209 «Задачника «Кванта».

**3 (6).** См. задачу M2208 «Задачника «Кванта».

**4.** Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на  $a$  м у себя и на  $b$  м у соперника», где  $a, b$  – действительные числа,  $0 < a < b$ . Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника – нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе

а) (2) конечно;

б) (5) бесконечно?

*И. Митрофанов*

**5 (8).** См. задачу M2210 «Задачника «Кванта».

**6 (12).** В каждой клетке таблицы  $1000 \times 1000$  стоит ноль или единица. Докажите, что можно либо вычеркнуть 990 строк так, что в любом столбце будет хотя бы одна невычеркнутая единица, либо вычеркнуть 990 столбцов так, что в любой строке будет хотя бы одна невычеркнутый ноль.

*А. Ромащенко*

**7 (14).** Квадрат  $ABCD$  разрезан на одинаковые прямоугольники с целыми длинами сторон. Фигура  $F$  является объединением всех прямоугольников, имеющих общие точки с диагональю  $AC$ . Докажите, что  $AC$  делит площадь фигуры  $F$  пополам.

*В. Произолов*

*Публикацию подготовили*

*С. Дориченко, Л. Медников, А. Шаповалов*

## ИНФОРМАЦИЯ

### Малый мехмат МГУ

Малый механико-математический факультет (МММФ) – школа юных математиков при механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова – работает более 30 лет. Основные задачи Малого мехмата – углубление знаний по тематической программе и расширение математического кругозора за рамки программы средней школы.

Малый мехмат состоит из двух отделений: вечернего и заочного. На вечернем отделении по субботам работают кружки по математике для школьников 1–11 классов из Москвы и Московской области; для учащихся 9–11 классов организованы еще и лекции. В основном на занятиях вечернего отделения рассматривают темы, не входящие в школьную программу, и задачи олимпиадного типа, направленные на развитие логического мышления.

На заочное отделение принимают учащихся из России, стран СНГ и Прибалтики, а также русскоязычных учащихся из стран дальнего зарубежья. В 2011 году заочное отделение Малого мехмата объявляет прием учащихся на 2011/12 учебный год в 8–10 классы.

Обучение на заочном отделении Малого мехмата осуществляется по переписке: школьники выполняют задания по высылаемым им методическим разработкам и отправляют

свои решения для проверки. Преподаватели, проверяющие работы, указывают на ошибки в рассуждениях или вычислениях и дают указания, помогающие школьникам самостоятельно исправить эти ошибки. После проверки работы отсылаются обратно. Методические разработки заочного отделения содержат необходимый для изучения данной темы теоретический материал и решения типовых задач, а также задачи для самостоятельного решения.

На заочном отделении существует возможность обучения нескольких учеников из одной школы по форме «Коллективный ученик». Группа работает под руководством своего школьного преподавателя и может включать не более 15 учащихся из одной параллели (если учащиеся, желающих заниматься, больше, то можно сформировать несколько групп). Как правило, группы изучают материалы методических разработок во время факультативных (кружковых) занятий. Группа «Коллективный ученик» обучается как *один учащийся*, т.е. оформляет по каждому заданию одну работу.

Школьники, прошедшие полный курс обучения (трех- или четырехлетний) и успешно закончившие обучение на заочном отделении (с итоговой оценкой «хорошо» или «отлично»), получают свидетельства об окончании Малого мехмата. Школьники, прошедшие неполный курс обучения или

закончившие заочное отделение с оценкой «удовлетворительно», получают справки об окончании Малого мехмата.

Обучение на заочном отделении *бесплатное*, за исключением почтовых расходов (если таковые имеются).

**Условия приема**

Зачисление индивидуальных учеников производится на конкурсной основе по результатам выполнения приведенной ниже вступительной работы.

Ученики, желающие поступить на заочное отделение Малого мехмата, должны не позднее 30 апреля 2011 года выслать в наш адрес письмом или по электронной почте решения задач вступительной работы. Для разных классов предусмотрены задачи с разными номерами, но при этом они не обязательно должны быть решены все. Вступительную работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. Записывать решения в тетрадь следует в том же порядке, в каком задачи идут во вступительной работе. На обложку тетради следует наклеить лист бумаги со следующими данными:

1. Фамилия, имя, отчество учащегося
2. Класс (в 2011/12 учебном году)
3. Полный домашний адрес с указанием почтового индекса
4. Адрес электронной почты (если он у вас есть)
5. Телефон (с кодом города)
6. Источник, из которого вы узнали о наборе на заочное отделение

Вступительные работы обратно не высылаются.

Группам «Коллективный ученик» не нужно выполнять вступительную работу, необходимо лишь не позднее 15 сентября 2011 года выслать письмом или по электронной почте следующие данные:

1. Фамилия, имя, отчество руководителя группы
2. Фамилии, имена, отчества учащихся (не более 15 человек)
3. Класс (в 2011/12 учебном году)
4. Полный адрес руководителя группы (по которому будут высылаются задания) с указанием почтового индекса
5. Адрес электронной почты (если он есть)
6. Телефон (с кодом города)
7. Источник, из которого вы узнали о наборе на заочное отделение

Наш адрес: 119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, мехмат, МММФ

Телефон: (495) 939-39-43

Электронная почта:

zaoch.mmmf@gmail.com (для вступительных работ)

zaoch.questionsf@gmail.com (для вопросов)

Сайт: http://mmmfm.math.msu.ru

**Вступительная работа**

После каждой задачи в скобках указаны классы, для поступления в которые предназначена эта задача.

**1 (8).** К приходу подружек Юля испекла круглый торт. Но она не знает, сколько подружек придет в гости – две или три. Она хочет заранее разрезать торт на куски так, чтобы независимо от того, сколько придет подружек, можно было разделить весь торт поровну на всех (включая Юлю), причем дополнительных разрезов делать не придется. Каково минимальное число кусков, на которое придется разрезать торт?

**2 (8).** Даны семь чисел. Сумма любых трех из них равна нулю. Найдите эти числа.

**3 (8).** Илья Муромец, Алеша Попович, Добрыня Никитич и Микула Селянинович поразили стрелами несколько Змеев Горынычей. В каждого из змеев попало ровно по три стрелы, причем это были стрелы разных богатырей. Больше всего

попаданий – шесть – было у Ильи Муромца, а меньше всего – три – у Алешы Поповича. Сколько змеев было подстрелено?

**4 (8–10).** Среди жителей города 85% знают русский язык, 80% – украинский, а 10% – не знают ни того, ни другого языка. Сколько процентов жителей знают оба языка?

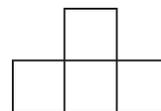
**5 (8–10).** Сколькими нулями оканчивается число  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 125$ ?

**6 (8–10).** Можно ли разрезать произвольный треугольник на четыре треугольника, любые два из которых не имеют общих сторон (но, возможно, имеют общие участки сторон)?

**7 (8–10).** Докажите, что если  $q = p - 1$ , то

$$(p^{16} + q^{16})(p^8 + q^8)(p^4 + q^4)(p^2 + q^2)(p + q) = p^{32} - q^{32}.$$

**8 (8–10).** Таблица  $20 \times 20$  клеток заполнена числами так, что в каждой четырех клетках, которые можно покрыть фигурой, изображенной на рисунке (фигуру можно поворачивать), сумма чисел равна 100. Найдите все числа, заполняющие таблицу.



**9 (9–10).** Три хорды окружности пересекаются в одной точке, причем две из них делятся этой точкой пополам. В каком отношении делится третья хорда и почему?

**10 (9–10).** Изобразите на координатной плоскости линию, заданную уравнением  $|x - y| + |x + y| = 2$ . Определите длину этой линии.

**11 (9–10).** Внутри квадрата  $ABCD$  взята точка  $M$  так, что треугольник  $AMD$  равносторонний. Найдите величину угла  $AMB$ .

**12 (9–10).** На арену цирка, имеющую форму круга радиуса 7 м, выбежали 7 клоунов. Обязательно ли расстояние между какими-нибудь двумя из них не превосходит 7 м?

**13 (9–10).** Решите систему

$$\begin{cases} xy + yz = 2009, \\ yz + zx = 2010, \\ xy + zx = 2011. \end{cases}$$

\* \* \*

**Почему расходится гармонический ряд?**

Пусть гармонический ряд сходится и  $x$  – его сумма:

$$x = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n + \dots$$

Тогда сумма членов с четными номерами равна  $x/2$ , так как  $1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots + 1/(2n) + \dots = 1/2(1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n + \dots) = x/2$ .

Значит, и сумма остальных членов (с нечетными номерами) тоже равна  $x/2$ . Поэтому

$$1 + 1/3 + 1/5 + \dots = 1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots$$

Но  $1 > 1/2$ ,  $1/3 > 1/4$ ,  $1/5 > 1/6$ , ... , и, складывая неравенства, получаем

$$1 + 1/3 + 1/5 + \dots > 1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots$$

Противоречие. Следовательно, гармонический ряд расходится.

Интересно, что ряд  $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \dots$  сходится и его сумма равна  $\ln 2$ . Докажем это аналогичным способом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots - 1/(2n)) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/2 + \dots + 1/(2n) - 2(1/2 + 1/4 + \dots + 1/(2n))) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/2 + \dots + 1/(2n) - (1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n)) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (1/(n+1) + 1/(n+2) + \dots + 1/(2n)) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{2n} 1/x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln 2n - \ln n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln 2 = \ln 2.$$

А. Канель

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №6 за 2010 г.)

1. 86 фотографий.

Плата за печать уменьшится сильнее всего, если мы увеличим число фотографий ровно до 100. Печать при этом будет стоить 300 рублей. Пусть изначально было  $n$  фотографий. Тогда нужно найти наименьшее  $n$ , для которого верно неравенство  $3,5n > 300$ . Это и есть  $n = 86$ .

2. Если переложить девять спичек так, как это показано на рисунке 1, то на нашу фигуру можно будет взглянуть с обратной стороны и увидеть все четыре кубика.

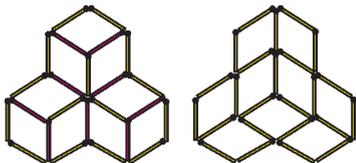


Рис. 1

3. Подойдет число 1340. Заметим, что  $2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$ . Пусть  $x$  – искомое четырехзначное число, а  $y$  – число, которое получится, если записать  $x$  пятнадцать раз подряд. По признаку делимости на 3 число  $y$  делится на 3 (его сумма цифр в 15 раз больше суммы цифр числа  $x$ ). Ясно также, что  $y$  делится на  $x$ . Тогда в качестве  $x$  подойдет, например, число  $1340 = 2 \times 2 \times 5 \times 67$  – оно не делится на 2010, а число  $y$  будет делиться на  $3x = 2 \cdot 2010$ .

4. По условию, если бы у Феди был желтый кусочек пазла с носом енота, а у Саши – зеленый кусочек с хвостом, они смогли бы собрать всю картинку целиком. Значит, сейчас у одного из них есть синий кусочек с лапкой, которого нет у

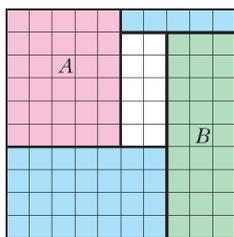


Рис. 2

Димы. Точно так же у Саши или Димы есть желтый кусочек с носом, которого нет у Феди. Тогда, если Федя и Дима объединятся с Сашей, у них окажутся недостающие желтый и синий кусочки, и они смогут составить пазл.

5. На рисунке 2 показан пример требуемого разрезания. Подумайте, есть ли другие способы разрезания.

### КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2010 г.)

1. а) Да, например подходят числа  $2, 2^3, 2^5, \dots, 2^{19}$ .

б) Нет.

Предположим противное: такой набор из 10 чисел найдется. Рассмотрим первые четыре числа  $a, b, c, d$ . По условию,  $abc$  – квадрат и  $bcd$  – квадрат. Тогда их произведение  $a(bc)^2d$  – тоже квадрат, а значит, и  $ad$  – квадрат. Но  $adb$  – квадрат по условию, откуда  $b$  – тоже квадрат, что условию противоречит.

2. См. рис.3.

3. Сможет.

Пусть хамелеон вначале находится на некоторой клетке  $A$ . Он красит ее в белый цвет. Далее, хамелеон мысленно отмечает те черные клетки доски, которые ему надо перекрасить в белый цвет, чтобы в итоге получилась шахматная раскраска. Хамелеону достаточно научиться такой операции: находясь в белой клетке  $A$ , переместиться в любую отмеченную черную клетку  $B$ , перекрасить ее в белый цвет и вернуться назад, оставив цвета всех клеток, кроме  $B$ , неизменными. Тогда он последовательно перекрасит все отмеченные клетки и получит шахматную раскраску.

Вот один из способов, которым маляр-хамелеон может проводить эту операцию.

Если  $B$  находится в том же столбце или той же строке, что и  $A$ , то все просто: хамелеон ходит на клетку  $B$ , красит ее в белый цвет и возвращается назад.

Пусть клетки  $A$  и  $B$  находятся в разных строках и столбцах. Обозначим через  $C$  клетку, которая стоит в том же столбце, что и  $A$ , и в той же строке, что и  $B$ .

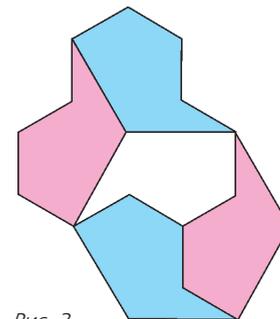


Рис. 3

Если  $C$  – белая, то хамелеон ходит на  $C$ , оставляя ее цвет и себя белыми, затем ходит на  $B$ , перекрашивает ее в белый цвет и тем же путем возвращается назад.

Если  $C$  – черная, хамелеон может проделать следующее:

- 1) пойти из  $A$  в  $C$  и покрасить  $C$  в белый цвет;
- 2) пойти из  $C$  в  $B$  и покрасить  $B$  в белый цвет;
- 3) выбрать черную клетку в строке с клеткой  $B$  (такая клетка найдется, так как хамелеон красит доску в шахматном порядке), пойти в нее и перекраситься самому в черный цвет;
- 4) пойти в  $C$  и покрасить ее в черный цвет;
- 5) вернуться в  $A$  и перекраситься в белый цвет.

4. Пусть  $ABC$  – данный треугольник,  $AB$  – его гипотенуза (рис.4). Обозначим точки касания вписанной окружности с катетами  $AC$  и  $BC$  через  $E$  и  $F$  соответственно. Легко видеть, что точки  $E$  и  $F$  расположены ближе к  $C$ , чем середины катетов  $AC$  и  $BC$  соответственно (докажите). Тогда средняя линия, соединяющая середины катетов, пересекает вписанную окружность и тем самым не может ее касаться.

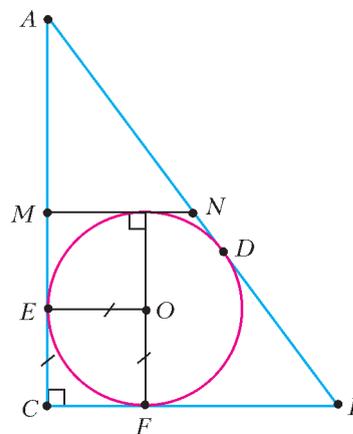


Рис. 4

Пусть вписанной окружности касается средняя линия  $MN$  (см. рис.4).

Видно, что  $EC = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{4}AC$ . Отрезки  $AD$  и  $AE$  равны как касательные к окружности, аналогично,  $BF = BD$  и  $EC = CF$ , откуда  $EC = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$ . Приравнявая полученные выражения для  $EC$ , имеем  $AB = \frac{1}{2}AC + BC$ . Тогда по теореме

Пифагора  $\left(\frac{1}{2}AC + BC\right)^2 = AC^2 + BC^2$ , откуда  $AC \cdot BC = \frac{3}{4}AC^2$ .

Значит,  $BC : AC = 3 : 4$ . Следовательно, стороны треугольника  $ABC$  относятся как  $3 : 4 : 5$ .

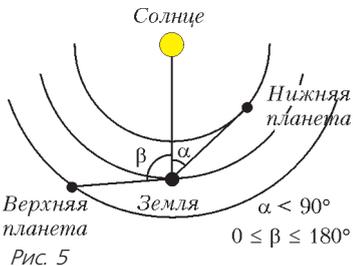
5. Не может.

Предположим противное. Пусть число  $x$  является степенью двойки, а полученное из него перестановкой цифр число  $y$  будет большей степенью двойки. Тогда  $y$  больше  $x$  в  $k$  раз, где  $k$  – тоже степень двойки, причем  $k$  меньше 10 (поскольку цифр в числе  $y$  столько же, сколько и в  $x$ ). Значит,  $k$  равно либо 2, либо 4, либо 8. С другой стороны, по признаку делимости на 9 разность числа и его суммы цифр всегда делится на 9. Так как суммы цифр у  $x$  и  $y$  одинаковы, их разность тогда тоже будет делиться на 9. Но она равна  $y - x = k \cdot x - x = (k - 1)x$ , т.е. равна либо  $x$ , либо  $7x$ . Ни одно из этих чисел на 9 не делится – противоречие.

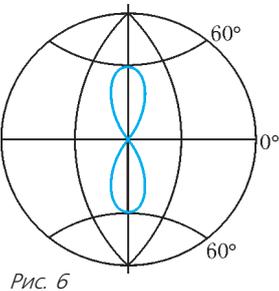
КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

- Нет, масса тела на Луне наибольшая, на Земле – наименьшая.
- Почти полностью освещенной Солнцем.
- Только верхняя (внешняя) планета, радиус орбиты которой превышает радиус орбиты Земли, может находиться на углом расстоянии более  $90^\circ$  от Солнца (рис.5).
- В первом случае Земля улетела бы по параболической траектории, во втором случае орбита практически не изменилась бы.
- Луна на картах изображается так, как она видна в телескоп.
- В новолуние скорость Луны вокруг Солнца будет минимальной, в полнолуние – максимальной.



- Луны вокруг Солнца будет минимальной, в полнолуние – максимальной.
- В принципе, Луну можно считать и спутником Земли, и спутником Солнца. Траектория Луны в системе отсчета Земли действительно «похожа» на орбиту спутника Земли, а в системе отсчета Солнца – на орбиту спутника Солнца.
  - По-прежнему наблюдались бы 2 прилива и 2 отлива, но период между приливами был бы около 6 часов, а не около 12 часов, как сейчас.
  - Да, могут. Например, у Сатурна по одной орбите движутся три спутника, а на одной орбите Юпитера находятся две группы астероидов – «греки» и «троянцы».
  - Если придать телу достаточно большую начальную скорость и сориентировать в нужном направлении, то можно одним выстрелом попасть не только на Луну, но и на Марс или другие планеты. Однако вывести спутник на околоземную орбиту без дополнительных маневров невозможно – он либо совсем улетит от Земли, либо упадет на нее.
  - Нет, такой спутник может существовать только у планеты, вместе с которой он совершает вращение.
  - Трасса представляет собой «восьмерку», касающуюся



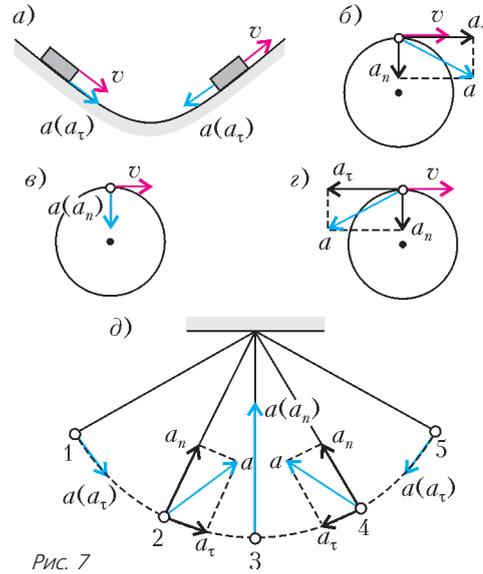
- Если придать телу достаточно большую начальную скорость и сориентировать в нужном направлении, то можно одним выстрелом попасть не только на Луну, но и на Марс или другие планеты. Однако вывести спутник на околоземную орбиту без дополнительных маневров невозможно – он либо совсем улетит от Земли, либо упадет на нее.
- Нет, такой спутник может существовать только у планеты, вместе с которой он совершает вращение.
- Трасса представляет собой «восьмерку», касающуюся 60-х параллелей, с точкой самопересечения на экваторе (рис.6).
- Нельзя.
- Да. За счет выброса сгоревшего топлива масса ракеты начнет уменьшаться, поэтому тяга двигателей станет понемногу превышать силу тяжести ракеты, и она полетит.
- Да. Так можно не только остановить ракету, но и заставить ее лететь в обратном направлении.
- Из-за большего поперечного сечения ракета-носитель сильнее тормозится атмосферой, вследствие чего, снижаясь, она начинает двигаться с большей угловой скоростью вокруг Земли.
- Полную невесомость астронавты ощутили бы после выхода снаряда из атмосферы Земли, так как до этого сила сопротивления воздуха создавала бы дополнительное ускорение снаряда, воспринимаемое как весомость.

Микроопыт

При наличии трения между бруском и горизонтальной поверхностью пройденный на Луне путь будет больше  $l$ , в отсутствие же трения пути будут одинаковы.

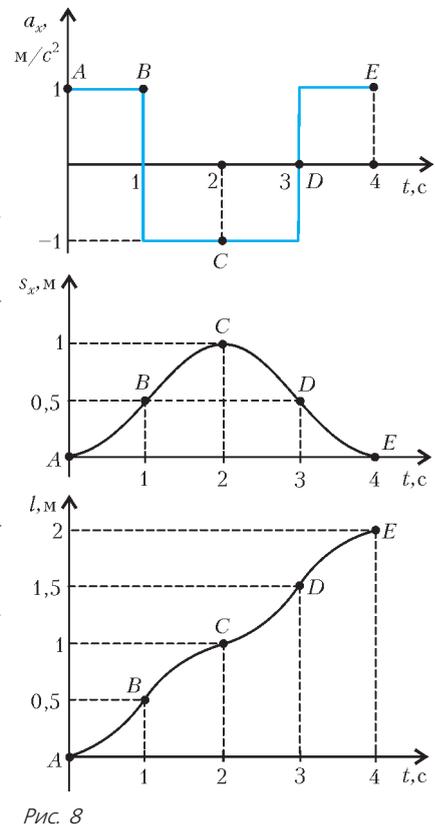
СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ

- В каждом из двух случаев ускорение совпадает с тангенциальной составляющей ускорения (рис.7,а).
- Тело движется по окружности, значит, у тела есть нормальная составляющая ускорения, которая направлена к центру окружности. Кроме этого, по условию задачи скорость тела возрастает, следовательно, есть и тангенциальная составляющая ускорения, которая направлена вдоль скорости. Полное ускорение  $\vec{a}$  изображено на рисунке 7,б.



- См. рис.7,в.
- См. рис.7,г.
- Прежде всего отметим, что траектория движения математического маятника – это окружность (рис.7,д). Поэтому, там, где скорость тела не равна нулю, есть нормальная составляющая ускорения.

Крайние точки 1 и 5 – это точки поворота. Скорость в этих точках обращается в ноль, поэтому нормальная составляющая ускорения в обеих точках равна нулю. А есть ли в этих точках тангенциальная составляющая? Вот здесь, бывает, ошибаются даже самые сильные школьники. Правильный ответ – да, тангенциальное ускорение в точках остановки есть. Проще всего применить к этим точкам второй метод рассуждений – динамический. В точках 1 и 5 на тело действуют две силы: сила тяжести и сила натяжения нити. Касательная составляющая силы тяжести и создает тангенциальное ускорение.



## ГРАФИКИ В ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧАХ

1. 150 км, 15 км/ч, 10 км/ч. 2. 6 км/ч, 4 км/ч.  
 3. 3 ч 12 мин. 4. 2 ч. 5. 45 мин. 6. 8 км.  
 7. 5 ч 30 мин. 8. 5/11. 9. 18 км. 10. 5.

## РАВНОУСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ПО ПРЯМОЙ

1.  $l = 32$  м. 2.  $k = 2$ . 3.  $a = 12$  м/с<sup>2</sup>.  
 4.  $v = 5$  м/с. 5.  $h = 45$  м. 6.  $l = 25$  м. 7.  $v = 40$  м/с.  
 8.  $v = 0,75$  м/с,  $a = 0,5$  м/с<sup>2</sup>. 9.  $v = 10$  м/с. 10.  $l = 250$  м.  
 11.  $v = 5$  м/с. 12.  $t = 1$  с. 13. См. рис.8.

## XXXII ТУРНИР ГОРОДОВ

## ЗАДАЧИ ОСЕННЕГО ТУРА (2010 ГОД)

## БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

## 8–9 классы

1. Продолжим шахматную раскраску на всю таблицу. Заметим, что среднее арифметическое чисел, стоящих в двух одноцветных клетках одного ряда (строки или столбца), равно числу в клетке, стоящей посередине между ними. Пусть углы – черные. Каждое белое число рамки равно полусумме своих черных соседей по рамке, при этом каждое черное число входит в две полусуммы. Сложив эти равенства, получим, что сумма белых чисел равна сумме черных.

2. Ось симметрии трапеции и биссектриса пересекаются в центре вписанной окружности и вместе с основаниями высекают два очевидно равных прямоугольных треугольника с катетами, равными радиусу и половине меньшего основания. Ось симметрии делит трапецию на две равные половинки. Прибавив к половинке один треугольник и отняв другой, получим часть, отсеченную биссектрисой. Значит, площадь части равна площади половинки. *Уточнение:* треугольники не вылезают за пределы трапеции, так как точка пересечения биссектрисы с противоположным (длинным) основанием удалена от его середины на половину короткого основания.

3. Могло.

Поставим кубик на клетку  $a_1$  и перекажем его по маршруту  $a_1$ - $a_2$ - $b_2$ - $b_1$ . При этом кубик сдвинулся на одну клетку вправо, снова стоит на нижней грани, а его верхняя грань ни разу не лежала на доске. Аналогично можно сдвинуть кубик на клетку вверх. Перемещая кубик подобным образом в соседние клетки, мы сможем обойти всю доску.

4. Пусть  $a$  школьников знают все 3 языка,  $b$  – только английский и немецкий,  $c$  – только английский и французский,  $d$  – только немецкий и французский. По условию  $a + b > 9(c + d)$ ,  $a + c > 9(b + d)$ . Взяв полусумму, получим  $a > 9d + 4(b + c)$ , тем более  $a > 9d$ , а это и требовалось.

5. Раскрасим вершины поочередно в белый и черный цвета. Хорды соединяют вершины одного цвета. Значит,  $N$  белых вершин разбились на пары, и  $N$  четно.

## 10–11 классы

1. а) Может. Пусть, например,  $s = 3$ . Обменяв 5 дублонов, получим 2 пистоля, а обменяв пистолы, получим 6 дублонов. б) Не может. Пусть  $s < 1$ . Обменяв  $n$  дублонов, мы получим  $ns^{-1} + \epsilon$  пистолей, где  $|\epsilon| \leq 1/2$ . Обменяв их снова на дублоны, получим  $(ns^{-1} + \epsilon)s < n + 1/2$  дублонов, поэтому больше  $n$  дублонов мы не получим уже при первой паре обменов. Пусть  $s > 1$  и после первого обмена мы получим  $n$  пистолей. Как показано выше, за два обмена из этих пистолей мы получим не более  $n$  пистолей, следовательно, и число дублонов после 4-го обмена не больше, чем после второго.

2. Пусть  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ ,  $AO = u$ ,  $BO = x$ ,  $CO = v$ ,  $DO = y$ .

а) Как известно, радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен  $(k + l - m)/2$ , где  $k$ ,  $l$  – катеты,  $m$  – гипотенуза. Поэтому

$$(u + x - a) + (y + v - c) = (x + v - b) + (u + y - d) \Leftrightarrow a + c = b + d.$$

Следовательно, четырехугольник  $ABCD$  – описанный.

б) Из теоремы Пифагора легко следует, что  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ . Отсюда

$$2ac = (a + c)^2 - (a^2 + c^2) = (b + d)^2 - (b^2 + d^2) = 2bd.$$

Из равенств  $a + c = b + d$ ,  $ac = bd$  следует, что пары  $(a, c)$  и  $(b, d)$  совпадают. А это и означает симметрию относительно одной из диагоналей.

5. 8 боев.

Обозначим через  $u_k$   $k$ -е число Фибоначчи ( $u_1 = u_2 = 1$ ,  $u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$  при  $k \geq 3$ ). Докажем по индукции, что

1) если победитель провел не меньше  $n$  боев, то число участников не меньше  $u_{n+2}$ ;

2) существует турнир с  $u_{n+2}$  участниками, победитель которого провел  $n$  боев.

*База* ( $n = 1$ ,  $u_3 = 2$ ) очевидна.

*Шаг индукции.* 1) Пусть победитель  $A$  выиграл последний бой у боксера  $B$ . Оставшиеся поединки фактически распадаются на два турнира: один из них выиграл  $A$ , а второй –  $B$ . В первом турнире победитель  $A$  провел не меньше  $n - 1$  боя, значит, число участников не меньше  $u_{n+1}$ . Во втором турнире победитель  $B$  провел не меньше  $n - 2$  боев, значит, число участников не меньше  $u_n$ . А в исходном турнире число участников не меньше

$$u_{n+1} + u_n = u_{n+2}.$$

2) Достаточно свести в заключительном поединке победителя турнира с  $u_{n+1}$  участниками, выигравшего  $n - 1$  бой, и победителя турнира с  $u_n$  участниками, выигравшего  $n - 2$  боя. Поскольку  $55 = u_{10}$ , сразу получаем ответ.

## СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

## 8–9 классы

1. *Первое решение.* Отметим на данной прямой  $l$  три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, чтобы  $AB$  и  $BC$  были меньше диаметра пятака. Прикладывая пятак к отрезкам  $AB$  и  $BC$  с одной стороны прямой, построим две окружности. Пусть они второй раз пересекутся в точке  $D$ . Прикладывая пятак к отрезкам  $AB$  и  $BC$  с другой стороны, получим две новые окружности, симметричные старым относительно  $l$ . Точка пересечения новых окружностей  $D'$  симметрична  $D$  относительно  $l$ , поэтому  $DD' \perp l$ .

*Второе решение.* Покажем, как за три обведения пятака построить две точки прямой, перпендикулярной данной (рис.9). Отметим на данной прямой точки  $A$  и  $B$  на расстоянии меньше диаметра пятака. Приложив к ним пятак двумя способами, получим две окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (симметричные относительно данной прямой), проходящие через  $A$  и  $B$ . Приложив пятак к точке  $A$  и к любой точке на данной прямой, отличной от  $B$ , получим окружность  $\omega$ .

Оказывается, вторые точки пересечения  $\omega$  с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (отличные от  $A$ ) лежат на прямой, перпендикулярной дан-

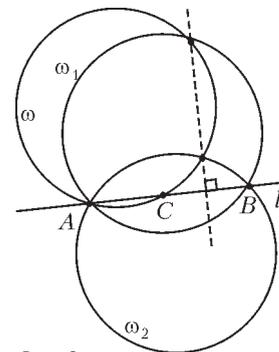


Рис. 9

ной. Это легко следует из следующего известного утверждения.

**Утверждение.** Пусть три равные окружности пересекаются в одной точке  $O$ . Тогда вторые точки пересечения окружностей образуют треугольник, в котором  $O$  – точка пересечения высот.

**Доказательство.** Пусть  $O_1, O_2, O_3$  – центры данных окружностей, а  $A_1, A_2, A_3$  – вторые точки пересечения. Тогда  $O_1A_3O_2O$  – ромб,  $A_3O_1 \parallel O_2O$  и  $A_3O_1 = O_2O$ . Аналогично,  $A_1O_3 \parallel OO_2$  и  $A_1O_3 = OO_2$ , т.е.  $A_1O_3O_1A_3$  – параллелограмм, и  $A_1A_3 \parallel O_1O_3$ . Но  $A_2O \perp O_1O_3$ , а значит,  $A_2O \perp A_1A_3$ . Аналогично,  $A_1O \perp A_3A_2$  и  $A_3O \perp A_1A_2$ , что и требовалось доказать.

2. Петя прав. Покажем, как он может отметить все  $m = k + l - 1$  точек, делящих отрезок на  $k + l$  равных частей. Назовем эти точки удачными. Будем считать, что длина каждой части 1. Покажем, что Петя может в любой момент отметить хотя бы одну из неотмеченных удачных точек (разумеется, если такие еще есть). Возьмем какой-нибудь отрезок с концами в отмеченных точках, внутри которого есть только неотмеченные удачные точки. Если он четной длины, то Петя может отметить его середину, которая будет удачной точкой. Если же отрезок нечетной длины  $2n + 1$ , то он может отметить  $n$ -ую точку. Раз Петя все время может отмечать одну из точек, то за  $m$  ходов он выполнит требуемое.

3. Решение этой задачи аналогично решению задачи М2209 «Задачника «Кванта».

4. **Первое решение.** Достаточно доказать, что в любых двух доминошках, граничащих по отрезку, проведенные диагонали выходят либо обе из правых нижних, либо обе из левых нижних углов. Предположим противное и найдем *плохую пару*: две соприкасающиеся доминошки с диагоналями разных направлений. Ясно, что общий отрезок не может быть целой стороной обеих доминошек. Принципиально возможны лишь два случая (рис.10). В обоих случаях однозначно определя-

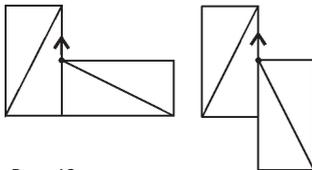


Рис. 10

ются *центр* (конец диагонали на середине стороны) и *направление* пары (направление от центра к концу другой диагонали на той же стороне) – на рисунке это *жирная точка* и *стрелка*. Рассмотрим плохую пару, чей центр ближе

всего к стороне, на которую показывает направление пары. Заметим, что положение доминошки, примыкающей к плохой паре в ее центре, и диагональ в этой доминошке тоже определены однозначно (рис.11). Но тогда возникает новая плохая пара, чей центр ближе к указанной стороне. Противоречие доказывает, что плохих пар нет.

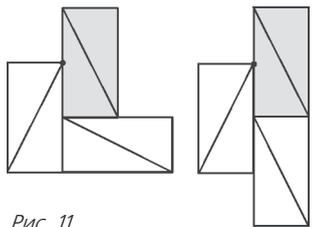


Рис. 11

Рассмотрим следующую доминошку, примыкающую к нижней стороне. Легко видеть, что диагональ в ней имеет то же «направление», что и в угловой. Это верно и для следующей справа доминошки и т.д. Значит, из *правого нижнего угла* выходит диагональ. Итак, доказано, что *хотя бы из одного угла* диагональ доминошки выходит.

2) Пусть из левого нижнего угла  $A$  выходит диагональ  $AB$  первой доминошки. К первой доминошке обязательно примыкает (по стороне или половине стороны) *вторая доминошка*, для которой  $B$  также служит вершиной. Поэтому диагональ второй доминошки имеет то же направление, что и  $AB$ . Заме-

тим также, что сумма «координат» правой верхней вершины ( $C$ ) у второй доминошки больше, чем у первой. Ко второй доминошке примыкает *третья*, для которой  $C$  является вершиной, и рассуждения можно повторить. В результате будет построена *цепь* из доминошек с диагоналями одного направления, соединяющая левый нижний и правый верхний углы прямоугольника. Следовательно, в правый верхний угол также входит диагональ доминошки.

3) Пусть из правого нижнего угла также выходит диагональ. Тогда можно построить цепь доминошек, соединяющую правый нижний и левый верхний углы прямоугольника. Эта цепь должна «пересечься» с ранее построенной цепью, т.е. имеет с ней общую доминошку. Противоречие, так как диагонали доминошек второй цепи «направлены» не так, как в первой.

5. Решение этой задачи аналогично решению задачи М2208 «Задачника «Кванта».

6. Проведем в треугольниках  $ABP$  и  $CBP$  средние линии  $C'C''$  и  $A'A''$ . Они равны по длине и перпендикулярны  $AC$  (так как обе параллельны отрезку  $BP$  и равны его половине). Проведем из точки  $K$  отрезок  $KK'$ , сонаправленный с  $C'C''$  и  $A'A''$  и равный им по длине. Тогда  $KC'C''K'$  и  $KA'A''K'$  – параллелограммы, откуда  $K'C''$  и  $K'A''$  – срединные перпендикуляры к сторонам  $AP$  и  $CP$  треугольника  $APC$ . Значит,  $K'$  – центр описанной окружности этого треугольника и лежит на срединном перпендикуляре к  $AC$ . Но тогда там лежит и точка  $K$  (так как прямая  $KK'$  перпендикулярна  $AC$ ).

7. Занумеруем в первый день сидящих рыцарей по часовой стрелке от 1 до  $N$ . Порядок за столом будем описывать строкой этих номеров, перечисляя рыцарей по часовой стрелке. Назовем *избранными* порядки вида  $k, k - 1, \dots, 2, 1, k + 1, k + 2, \dots, N$  для  $k = 1, 2, 3, \dots, N - 1$  ( $N$ -й избранный порядок совпадает с  $(N - 1)$ -м, поэтому он не нужен). Докажем, что из любого порядка можно пересесть в избранный. Для этого осуществим пересадку, при которой *левая группа*  $k, k - 1, \dots, 2, 1$  *максимальная из возможных*. Покажем, что остальные рыцари при этом автоматически сидят в нужном порядке  $(k + 1, k + 2, \dots, N)$ . Пусть это не так. Будем двигать число  $k + 1$  по часовой стрелке. Если по пути  $k + 1$  упрется в  $k + 2$ , будем двигать эту пару. Упершись парой в  $k + 3$ , будем двигать тройку и т. д. В итоге до  $k$  доедет «поезд»  $k + 1, k + 2, \dots, k + m$ . При этом  $k + m < N$  (иначе никакого движения вообще не было). Прогоним все числа поезда, кроме  $k + 1$ , сквозь левую группу, а  $k + 1$  присоединим к ней. Противоречие с максимальной левая группы.

Докажем, что, пересаживаясь каждый день в избранном порядке, рыцари повторяются не позже, чем на  $N$ -й день. Пусть для произвольного порядка Мерлин выполнит такой обход: двигаясь все время по часовой стрелке, пройдет от 1-го до 2-го, затем до 3-го, до 4-го, ..., до  $N$ -го и снова до 1-го. Свяжем с порядком *число оборотов* Мерлина вокруг стола. Легко убедиться, что при разрешенной пересадке двух рыцарей число оборотов не меняется. Однако числа оборотов избранных порядков различны (для  $k$ -го порядка число оборотов равно  $k$ ), поэтому избранные порядки с разными  $k$  пересадками друг из друга не получаются. Рассаживая рыцарей в очередном избранном порядке, Мерлин может получить первое повторение не ранее  $N$ -го дня.

10–11 классы

1. а) Не всегда. Пусть 98 точек лежат на одной прямой  $l$ , а две точки  $A$  и  $B$  – вне нее, причем  $A$  и  $B$  не симметричны относительно  $l$ . Если неизвестно расстояние между  $A$  и  $B$ , то восстановить его нельзя: при замене точки  $B$  на  $B'$ , симметричную  $B$  относительно  $l$ , остальные расстояния не изменятся, а расстояние  $AB'$  будет отличаться от  $AB$ .

б) При  $k = 96$ .

Покажем, что если количество городов  $m \geq 4$ , то  $k = m - 4$ . Для  $m = 4$  утверждение легко проверяется. Пусть оно верно для  $m = n$ , докажем его для  $m = n + 1$ .

Если для некоторого города  $A$  стерты его расстояния для  $n - 2$  городов, то его можно симметрично отразить – с сохранением всех известных расстояний – относительно прямой, соединяющей остальные два города (назовем их  $B$  и  $C$ ). Незвестные нам расстояния при этом изменятся, так как на прямой, соединяющей  $B$  и  $C$ , не находится никакой другой город. Поэтому  $k \leq n - 3$ .

Пусть стерто не более  $n - 3$  записей. Выберем город  $A$ , для которого стерто хотя бы одно расстояние до другого города, и рассмотрим остальные  $n$  городов. Между ними стерто не более  $n - 4$  расстояний, и по предположению индукции можно восстановить все эти расстояния, а тогда – и взаимное расположение этих городов (углы между соединяющими их отрезками). Для города  $A$  известны расстояния по крайней мере до 3 городов, и это позволяет однозначно восстановить его расположение на плоскости, а тем самым, и расстояния до остальных городов.

**Решение для знатоков.** Рассмотрим граф со 100 вершинами и 96 ребрами, соответствующими *стертым* записям. Этот граф содержит не менее 4 компонент связности. Зафиксируем по вершине  $(A, B, C, D)$  в каждой из этих 4 компонент. Все расстояния между этими вершинами известны.

Рассмотрим произвольную вершину первой компоненты. Известны ее расстояния до точек  $B, C, D$ , следовательно, положение соответствующего города на плоскости определено однозначно. Аналогична ситуация с вершинами оставшихся компонент.

4. а) Нет. Пусть первый маг всегда применяет заклинание с наибольшей разностью  $b - a$ . Тогда после ответного хода разность высот первого и второго как минимум 0. В результате после нескольких ходов разность всегда неотрицательна и, значит, второй не выигрывает.

б) Да, это возможно.

**Первое решение.** Рассмотрим произвольную убывающую последовательность положительных чисел  $\{a_n\}$ , где  $a_n < 50$  (например  $a_n = 1/n$ ), и пусть в  $n$ -м заклинании  $a = a_n$ ,  $b = 100 - a_n$ . Ответив на  $n$ -е заклинание заклинанием с номером  $m > n$ , второй маг выигрывает: высота первого станет равной  $a_m - a_n < 0$ , а высота второго  $a_n - a_m > 0$ .

**Второе решение.** Годится набор заклинаний, состоящий из всех заклинаний, подходящих под условие задачи:  $(0 < a < b < 100)$ . На заклинание  $(a, b)$  второй ответит  $((100 - b)/2, 100 - a)$ .

6. Индукцией по  $m + n$  докажем более общее утверждение. Пусть в каждой клетке таблицы, где менее  $2^m$  строк и менее  $2^n$  столбцов, стоит нуль или единица. Тогда можно либо оставить не более  $m$  столбцов так, что в каждой строке будет хотя бы один нуль, либо оставить не более  $n$  строк так, что в каждом столбце будет хотя бы одна единица.

**База** (таблица  $1 \times 1$ ) очевидна. **Шаг индукции.** Пусть в таблице  $T$  единиц не меньше, чем нулей. Тогда есть строка, где единиц не меньше половины. Отметим эту строку и оставим только столбцы, где в ней стоят нули (если таких нет, то все доказано). В полученной таблице  $T_1$  столбцов меньше, чем  $2^{n-1}$ , и по предположению индукции в  $T_1$  можно оставить не более  $m$  «хороших» столбцов (которые будут такими и для  $T$ ) или не более  $n - 1$  «хорошей» строки. В последнем случае, вернув этим строкам исходную длину и добавив отмеченную строку, получим «хороший» набор строк для  $T$ .

7. Решение этой задачи аналогично решению задачи M2213 «Задачника «Кванта».

## «КВАНТ» УЛЫБАЕТСЯ

(см. «Квант» №5 за 2010 г.)

1. Сломан один из пикселей в правой части равенства, так что знак факториала «!» превратился в единицу.



2. Речь идет о рулоне бумаги с дыркой в центре: требуется найти длину листа, скатанного в рулон толщиной 3 см. Пусть толщина самого листа равна  $a$  см, а радиус дырки в центре рулона равен  $r$  см. Мысленно поставим рулоны на стол и посмотрим на них сверху. Площадь кольца у первого рулона (толщиной 1 см) равна  $\pi(r+1)^2 - \pi r^2 = \pi(2r+1)$ . Но эта же площадь равна  $900a$ , так как рулон скатан из листа длиной 900 м и толщиной  $a$ . Значит,  $\pi(2r+1) = 900a$ . Аналогично, посчитав двумя способами площадь кольца у второго рулона (толщиной 2 см), получим  $\pi(4r+4) = 2700a$ . Из этих двух соотношений найдем  $r = 0,5$  см и  $900a = 2\pi$ . Поэтому площадь кольца у третьего рулона (толщиной 3 см) равна  $\pi(r+3)^2 - \pi r^2 = \pi(6r+9) = 12\pi = 6 \cdot 900a = 5400a$ , т.е. длина листа равна 54 метрам.
3. По условию веревка имеет толщину, и ее запас не ограничен. Поэтому веревкой можно просто завалить весь ров!
4. Скошенные ведра можно вставлять друг в друга, при этом стопка получается низкой, и ее удобно транспортировать и хранить. По аналогичному принципу сделаны одноразовые стаканчики для напитков и тележки в супермаркетах.

# КВАНТ<sup>+</sup>

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.С.Воропаев, С.А.Дориченко, А.А.Егоров,  
Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова,  
А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,  
М.В.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**Е.А.Митченков, Л.В.Калиничева**

### Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»**

**Тел.: 930-56-48**

**E-mail: math@kvantjournal.ru, phys@kvantjournal.ru**

**Сайт: kvant.info, kvantjournal.ru**